УДК 512.5

АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛАМИ

А. В. Власова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: VAnastasiyaV@gmail.com

Доказывается критерий принадлежности состояний аттракторам и описывается формирование аттракторов динамических систем, ассоциированных с циклами, состояниями которых являются двоичные векторы заданной размерности, а эволюционная функция преобразует вектор с помощью одновременного выполнения следующих действий: начальный 0 и последняя 1 заменяются на 1 и 0 соответственно, каждая диграмма 10 — на 01.

Ключевые слова: *аттрактор, динамическая система, эволюционная функция.*

Введение

В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, заметное место занимают графовые модели, в которых отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг. Здесь можно выделить следующую конструкцию, получившую самостоятельное значение в теории графов — бесконтурный граф с заданной структурой источников и стоков [1]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных графов. Это позволяет использовать при изучении модельных графов идеи и методы теории конечных динамических систем и, в частности, динамических систем двоичных векторов (см., например, [2, 3]), когда имеется естественная двоичная кодировка графов рассматриваемого класса.

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным, т. е. из каждой вершины выходит точно одна дуга. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*.

Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров состояний системы без проведения динамики, таких, как индекс (расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние), период (длина соответствующего аттрактора), ветвление (количество непосредственных предшественников) [4] и другие. Программа [5] позволяет исследовать некоторые из эволюционных параметров определенных систем. Одной из нерешенных в общем случае задач является вопрос о том, принадлежит ли данное состояние аттрактору, что обозначено, например, в [1, 3].

В данной работе представлены критерий принадлежности состояний аттракторам и описание формирования аттракторов динамических систем двоичных векторов, порожденных такими графами, как циклы.

1. Описание динамической системы

Пусть имеется n-звенный цикл c. Выберем в нём какую-либо вершину в качестве начальной и обозначим её c_0, тогда цикл можно записать как $c = c_0c_1..c_{n-1}c_n$, где $c_n = c_0$. Придадим каждому ребру цикла произвольную ориентацию. Дуги, имеющие направление по часовой стрелке, пометим символом 1, а дуги с противоположной ориентацией — символом 0.

Таким образом, каждой ориентации цикла сопоставляется n-мерный двоичный вектор. С другой стороны, каждый такой вектор однозначно определяет некоторую ориентацию цикла, так что между множеством C^n, $n > 2$, всевозможных ориентаций n-звенного цикла и множеством B^n всех двоичных векторов размерности n устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Динамическая система (C^n, θ) вводится следующим образом: если дан некоторый граф c из C^n, то его динамическим образом $\theta(c)$ является граф, получаемый из c одновременным превращением всех стоков в источники (SER-динамика бесконтурных графов [1]).

Исходная динамическая система (C^n, θ) оказывается изоморфной динамической системе (B^n, θ), которая вводится следующим образом: пусть состоянием динамической системы (B^n, θ) в данный момент времени является вектор $v \in B^n$, тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, описываемом правилами: 1) если первой компонентой в v является 0 и последней компонентой является 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней компонентой — 0; 2) если в составе v имеются диграммы вида 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01; 3) других отличий между v и $\theta(v)$ нет. Вышеперечисленные правила применяются одновременно. Будем полагать по определению, что контуры представляют собой аттракторы единичной размерности. На рис. 1 показана карта динамической системы (B^6, θ).

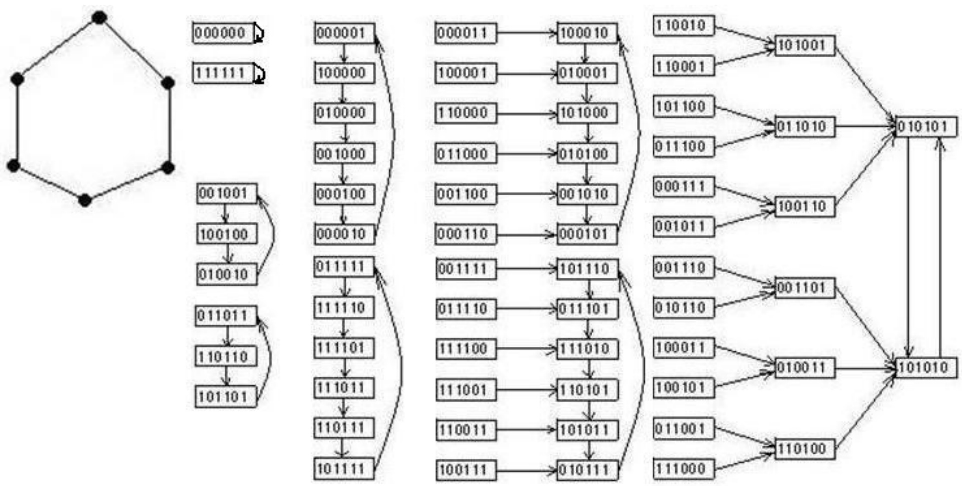

Рис. 1. Карта динамической системы (B^6, θ)

2. Аттракторы динамической системы $(B^n,\ \theta)$

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность вектора* v, т. е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учётом циклического сдвига. Например, $p_c(111111) = 6, p_c(101010) = 0, p_c(111011) = 4, p_c(\theta(111011)) = p_c(110111) = 4$. Очевидно, что для состояния v системы $(B^n,\ \theta)$ верно $0 \leqslant p_c(v) \leqslant n$. *Циклический блок* — это максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве $\geqslant 2$ с учетом циклического сдвига. При работе с динамической системой, ассоциированной с циклом, будем под понятием *блок* подразумевать понятие *циклический блок. Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через p_c^0, p_c^1 суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

Теорема 1 (критерий принадлежности состояния аттрактору). Вектор динамической системы (B^n, θ) тогда и только тогда принадлежит аттрактору, когда у него $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$. При этом периоды равны делителям числа n, и если $p_c^0 = 0$, то аттрактор представляет собой цикл, в котором следующее состояние получается из предыдущего циклическом сдвигом влево на одну компоненту, а при $p_c^1 = 0$ — вправо.

Доказательство. Рассмотрим состояния системы (B^n, θ) в зависимости от наличия и количества 0- и 1-блоков.

I. *Вектор не содержит ни 0-, ни 1-блоков, т. е.* $p_c^0 = p_c^1 = 0$. Это состояние вида $(01)^{\frac{n}{2}}$, которое при динамике переходит в состояние $(10)^{\frac{n}{2}}$, или вида $(10)^{\frac{n}{2}}$, которое при динамике переходит в состояние $(01)^{\frac{n}{2}}$, где n — четное (при нечетном n состояние содержит хотя бы один блок, образуемый первой и последней компонентами). Таким образом, эти состояния образуют аттрактор длины 2.

II. *Вектор содержит блоки, и все они состоят из 1.* Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 1-блоков.

1) Вектор имеет единственный 1-блок. Не теряя общности, рассмотрим эволюцию такого состояния при расположении 1-блока в начале вектора. В табл. 1 приведена его схематичная эволюция.

Таким образом, эти состояния образуют аттрактор длины n, причём в нем каждое следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом влево на одну компоненту. Можно заметить, что длина 1-блока на каждом очередном шаге остаётся прежней.

2) Вектор имеет несколько блоков, и все они состоят из 1. Из рассмотрения п. II(1) можно заключить, что каждый 1-блок на очередном шаге смещается влево на одну компоненту с учётом циклического сдвига. Таким образом, такие состояния образуют аттракторы, причём в каждом аттракторе следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом влево на одну компоненту, и их периоды равны делителям числа n, отличным от 1 и 2.

III. *Вектор содержит блоки, и все они состоят из 0.* Рассмотрим эволюцию таких состояний в зависимости от количества 0-блоков.

1) Вектор имеет единственный 0-блок. Не теряя общности, рассмотрим эволюцию такого состояния при расположении 0-блока в начале вектора. В табл. 2 приведена его схематичная эволюция.

Таким образом, эти состояния образуют аттрактор длины n, причём в нем каждое следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом вправо на одну компоненту. Можно заметить, что длина 0-блока на каждом шаге остаётся прежней.

Таблица 1

Эволюция вектора, содержащего единственный 1-блок

№ шага	Состояние
0	$1^h01\dots010$
1	$1^{h-1}010\dots101$
2	$1^{h-2}0101\dots011$
...	...
$h-2$	$110\dots10101^{h-2}$
$h-1$	$101\dots010101^{h-1}$
h	$010\dots10101^h$
$h+1$	$101\dots0101^h0$
$h+2$	$010\dots101^h01$
...	...
$n-1$	$01^h01\dots01$
n	$1^h010\dots10$

Таблица 2

Эволюция вектора, содержащего единственный 0-блок

№ шага	Состояние
0	$0^h101\dots0101$
1	$10^h10\dots1010$
2	$010^h1\dots0101$
...	...
$n-h$	$1010\dots1010^h$
$n-h+1$	$0101\dots010101^{h-1}$
$n-h+2$	$0010\dots101010^{h-2}$
...	...
$n-1$	$0^{h-1}1010\dots1010$
n	$0^h101\dots0101$

2) Вектор имеет несколько блоков, и все они состоят из 0. Из рассмотрения п. III(1) можно заключить, что каждый 0-блок на очередном шаге смещается вправо на одну компоненту с учётом циклического сдвига. Таким образом, эти состояния образуют аттракторы, причём в каждом аттракторе следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом вправо, и их периоды равны делителям числа n, отличным от 1 и 2.

IV. *Вектор состоит из 0-блоков (1-блоков), после которых идут 1-блоки (0-блоки).* Так как блоки в состоянии рассматриваются с учётом циклического сдвига, то не имеет значения, идут ли сначала 0-блоки или 1-блоки. Не теряя общности, будем считать, что сначала идут 0-блоки, потом 1-блоки.

1. Рассмотрим эволюцию данных состояний, включающих в себя по одному 0-блоку и 1-блоку, в зависимости от их значений p_c^0 и p_c^1.

Исходя из рассуждений предыдущих пунктов, можно заключить, что в данном случае на каждом шаге эволюции одновременно 0-блок начнет движение вправо, 1-блок — влево с учётом циклического сдвига, пока не окажутся стоящими рядом. Рассмотрим эволюцию с этого шага в зависимости от сумм длин 0- и 1-блоков.

а) Состояния, для которых $p_c^0 < p_c^1$.

В табл. 3 приведена схематичная эволюция таких состояний.

Таблица 3

Эволюция вектора, содержащего единственные 0-блок и 1-блок, с $p_c^0 < p_c^1$

№ шага	Состояние
0	$01\dots01010^{h_0}1^{h_1}0101\dots01$
1	$10\dots101010^{h_0-1}1^{h_1-1}01010\dots10$
2	$01\dots0101010^{h_0-2}1^{h_1-2}010101\dots10$
...	...
h_0-2	$01\dots010101001^{h_1-h_0+2}010101\dots10$
h_0-1	$10\dots101010101^{h_1-h_0+1}0101010\dots01$

Таким образом, когда блоки оказываются стоящими рядом, то их длины начинают уменьшаться у каждого на единицу за счёт поглощения компонент друг друга, пока 0-блок полностью не поглотится. В результате остаётся 1-блок и чередующиеся

0 и 1; дальнейшая эволюция такого состояния описана в п. II(1) и показано, что оно принадлежит аттрактору.

б) Состояния, для которых $p_c^0 = p_c^1$.

Покажем, что такая ситуация возможна только при четном n, независимо от количества и размерности 0- и 1-блоков. Докажем это индукцией по p_c^0.

Базис индукции: $p_c^0 = 1$. Здесь длины 0- и 1-блоков равны 1 и в сумме дают чётное число; количество компонент между этими блоками с учетом циклического сдвига также чётно, так как это чередующиеся 0 и 1, а после 0-блока обязательно стоит 1 и перед 1-блоком стоит 0. В итоге получаем чётное количество компонент вектора.

Шаг индукции. Предположим, что при любом $p_c^0 \leqslant m \in \mathbb{N}$ количество компонент вектора чётно, и покажем, что это условие выполняется при $p_c^0 = m + 1$.

Рассмотрим несколько ситуаций.

1) Длины первого 0-блока и последнего 1-блока не равны 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одному элементу, получаем случай $p_c^0 = m$, для которого требуемое условие выполняется, а отсекли мы две компоненты, т. е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

2) Длина первого 0-блока или длина последнего 1-блока равна 1. Например, длина первого 0-блока равна 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одной компоненте, получаем случай $p_c^0 = m$, для которого требуемое условие выполняется. От 0-блока осталась одна компонента, до следующего 0-блока идёт нечетное количество компонент, а отсекли мы две компоненты, т. е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

3) Длины первого 0-блока и последнего 1-блока равны 1. Тогда отсекаем у этих блоков по одному элементу, получаем случай $p_c^0 = m$, для которого требуемое условие выполняется. От 0-блока и 1-блока осталось по одной компоненте, до следующего 0-блока идёт нечетное количество компонент, от предыдущего 1-блока идёт нечетное количество компонент, а отсекли мы две компоненты, т. е. в итоге получаем чётное число и выполнение нужного условия.

Заключаем, что действительно ситуация $p_c^0 = p_c^1$ возможна только для векторов четной размерности.

Из рассуждений п. IV(1,a) получаем, что блоки будут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останется по одной компоненте, причём это уже будет вектор, полностью состоящий из чередующихся 0 и 1, а про его эволюцию было сказано в п. I, и это состояние принадлежит аттрактору.

в) Состояния, для которых $p_c^0 > p_c^1$.

Здесь ситуация аналогична п. IV(1,a), только в конце концов остаётся один 0-блок и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция описана в п. III(1).

2. Рассмотрим состояния, включающие в себя несколько 0-блоков, после которых идут 1-блоки, также в зависимости от значений p_c^0 и p_c^1 в векторе.

а) Состояния, для которых $p_c^0 < p_c^1$.

Из п. IV(1,a) получаем, что здесь на каждом шаге эволюции 0-блоки начинают двигаться вправо, а 1-блоки — влево за счёт поглощения компонент, стоящих между блоками, с учетом циклического сдвига; когда они оказываются стоящими рядом, то блоки начинают уменьшаться на единицу каждый за счёт поглощения компонент друг друга, пока один из блоков полностью не поглотится, после чего опять продолжаются сдвиги блоков навстречу друг другу, пока не поглотится самый последний 0-блок. Таким образом, в состоянии останутся только 1-блоки и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция описана в п. II, и это состояние принадлежит аттрактору.

б) Состояния, для которых $p_c^0 = p_c^1$.

В п. IV(1,*б*) было показано, что такая ситуация возможна только для четного n. Из рассуждений пп. IV(1,*б*) и IV(2,*a*) получаем, что при эволюции 0-блоки и 1-блоки начнут движение навстречу друг другу, пока не окажутся рядом, а затем начнут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока не поглотится один из блоков, после чего продолжится аналогичное движение, пока рядом не окажутся последние оставшиеся 0-блок и 1-блок, которые начнут поглощать друг друга с каждым следующим шагом эволюции, пока от них не останутся по одной компоненте, причём это уже будет вектор, полностью состоящий из чередующихся 0 и 1, эволюция которого была описана в п. I, и он принадлежит аттрактору.

в) Состояния, для которых $p_c^0 > p_c^1$.

Здесь ситуация аналогична п. IV(2,*a*), только в состоянии в конце концов остаётся один 0-блок и чередующиеся 0 и 1, дальнейшая эволюция состояния описана в п. II, и оно принадлежит аттрактору.

V. *Вектор состоит из 0-блоков и 1-блоков в произвольном порядке.*

Из доказательств предыдущих пунктов можно заключить, что при эволюции такого состояния 0-блоки будут циклически сдвигаться вправо, при этом если они будут встречаться с 1-блоками, то длина этого 0-блока будет уменьшаться с очередным шагом эволюции, т. е. если есть подряд стоящие 0-блоки, то они или все поглотятся, если следующие за ними подряд стоящие 1-блоки в сумме имеют равный или больший порядок, или поглотят сами следующие за ними подряд стоящие 1-блоки и продолжат сдвиг вправо, встречая очередные 1-блоки, если порядок 0-блоков будет больше порядка 1-блоков. С точки рассмотрения 1-блоков ситуация получается аналогичная. В итоге получим состояние, имеющее только 0-блоки, только 1-блоки или содержащее только чередующиеся нули и единицы, чьи эволюции описаны в пп. I–III, где показано, что они и только они (с учетом дальнейшего доказательства) принадлежат аттракторам.

Для полноты заметим, что контуры представляют собой аттракторы единичной длины; периоды равны делителям числа n. ■

Заключение

Для динамических систем, ассоциированных с циклами, решена задача выяснения принадлежности состояния аттрактору; приведено описание аттракторов этих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman & Hall/CRC, 2001. 372 p.
2. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
3. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinat. 2004. V. 8. P. 425–439.
4. *Власова А. В.* Ветвления в конечной динамической системе (B^n, θ) // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы итог. студ. науч. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 57–58.
5. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство РОСПАТЕНТа №2009614409, зарегистрировано 20 августа 2009.