УДК 519.1

КОНГРУЭНЦИИ ЦЕПЕЙ: НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА

Е. О. Карманова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: janekao@mail.ru

Под конгруэнцией цепи понимается отношение эквивалентности на множестве её вершин, все классы которого являются независимыми подмножествами. Доказана теорема 1 о количестве всех конгруэнций для m-рёберной цепи. Для заданного связного графа G теорема 2 находит длину наименьшей цепи, факторизующейся на данный граф.

Ключевые слова: *цепь, конгруэнция, отношение эквивалентности, фактор-граф, число Белла.*

Ориентированным графом (орграфом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин; α — отношение (смежности) на V. Пары в α называются дугами орграфа G. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. *Фактор-графом* орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε; $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : \exists u_1 \in \varepsilon(v_1)\, \exists u_2 \in \varepsilon(v_2)\ ((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. *Конгруэнцией* K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что фактор-граф G/θ является K-графом. В [2] рассмотрен случай, когда K — класс сильно связных орграфов, и предложен способ построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в фактор-графе. В [3] установлено, что n-элементная ориентированная цепь имеет 2^{n-3} минимальных сильно связных конгруэнций.

В качестве класса K возьмём класс неориентированных графов.

Под неориентированным графом (или, для краткости, графом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. В графе пара встречных дуг (u, v), (v, u) рассматривается как один элемент, называемый ребром $\{u, v\}$. Вершины u и v по определению инцидентны ребру $\{u, v\}$.

Множество вершин графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны. Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Пусть P_m — неориентированная m-рёберная цепь, и пусть её вершины пронумерованы натуральными числами $0, 1, 2, \ldots, m$. Через $\mathrm{Con}P_m$ обозначим множество всех конгруэнций цепи P_m, а через $E(m)$ — множество всех эквивалентностей на m-элементном множестве. Количество элементов в $E(m)$ называется числом Белла $B(m)$. В работе [4] высказана гипотеза о том, что $|\mathrm{Con}(P_m)| = B(m)$, то есть что $|\mathrm{Con}(P_m)| = |E(m)|$. Ниже приводится доказательство этого факта.

Напомним, что числом Стирлинга второго рода $s_2(m, k)$ называется количество всех эквивалентностей с k классами на m-элементном множестве. Очевидно, что

$\sum\limits_{n=1}^{m} s_2(m,n) = B(m)$. Известно, что $s_2(m,k) = s_2(m-1,k-1) + ks_2(m-1,k)$ для $0 < k < m$ (рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода). Числа Белла и Стирлинга для графов рассматривались, например, в работе [5].

Пусть $c(P_m,k)$ — количество всех конгруэнций цепи P_m с k классами. Очевидно, что если $\mathrm{Con}(P_m)$ — множество всех конгруэнций цепи P_m, то $|\mathrm{Con}(P_m)| = \sum\limits_{k=2}^{m+1} c(P_m,k)$.

Теорема 1. $|\mathrm{Con}(P_m)| = |E(m)|$.

Доказательство. Методом математической индукции докажем равенство $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$ для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Базис индукции: $m = 2$. Цепь P_2 имеет две конгруэнции: одна с двумя классами $\{0,2\},\{1\}$, вторая с тремя классами $\{0\},\{1\},\{2\}$, таким образом, $c(P_2,2) = 1$ и $c(P_2,3) = 1$. Так как двухэлементное множество $\{0,1\}$ имеет два разбиения — одно с одним блоком $\{0,1\}$, второе с двумя блоками $\{0\},\{1\}$, то $s_2(2,1) = 1$, $s_2(2,2) = 1$.

Шаг индукции. Предположим, что $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, верно для цепи P_m и цепей длины меньше m, и покажем, что $c(P_{m+1},k+1) = s_2(m+1,k)$, $1 \leqslant k \leqslant m+1$.

Заметим, что из каждой конгруэнции θ с $k+1$ классами цепи P_m можно получить конгруэнции с $k+1$ классами цепи P_{m+1} двумя способами. Первый способ: добавив в один из k θ-классов (кроме класса $\theta(m)$) вершину $m+1$, получаем разбиение множества вершин цепи P_{m+1}, все $k+1$ классов которого будут независимыми, и, следовательно, разбиение является конгруэнцией цепи P_{m+1}. Таких возможностей имеется $kc(P_m,k+1)$. Второй способ: создаём новый класс $\{m+1\}$, который вместе с классами конгруэнции θ образует разбиение множества вершин цепи P_{m+1}. У этого разбиения все классы образуют независимые подмножества, т. е. получаем конгруэнцию цепи P_{m+1}. Этим способом может быть получено $c(P_m,k)$ конгруэнций цепи P_{m+1}. Таким образом, $c(P_{m+1},k+1) = c(P_m,k) + kc(P_m,k+1)$.

Ввиду предположения индукции и рекуррентной формулы для чисел Стирлинга второго рода запишем $c(P_{m+1},k+1) = c(P_m,k) + kc(P_m,k+1) = s_2(m,k-1) + ks_2(m,k) = s_2(m+1,k)$. Тем самым доказано равенство $c(P_m,k+1) = s_2(m,k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Докажем теперь, что $|\mathrm{Con}(P_m)| = |E(m)|$. В самом деле, $|\mathrm{Con}(P_m)| = \sum\limits_{k=2}^{m+1} c(P_m,k) = \sum\limits_{k=1}^{m} c(P_m,k) = \sum\limits_{k=1}^{m} s_2(m,k) = |E(m)|$. ■

В [4] обсуждалась также задача нахождения для данного связного графа G цепи с минимально возможным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является G.

Задача китайского почтальона для произвольного связного графа [6] состоит в нахождении кратчайшего обхода, начинающегося и заканчивающегося в одной и той же вершине и содержащего все рёбра графа (рёбра в этом обходе могут повторяться в случае необходимости). Используя один из алгоритмов, связанных с этой задачей [7], докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть G — связный граф. Тогда $p(G) = m + l - k$, где m — количество рёбер графа G; l — количество рёбер в минимальном цепном паросочетании на множестве вершин нечётной степени (нечётных вершин) графа G; k — максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Доказательство. Пусть дан произвольный связный граф G с m рёбрами и n вершинами. Найдем длину наименьшей цепи P_r, факторизующейся на G. Так как связный граф тогда и только тогда является фактор-графом r-рёберной цепи, когда в нем есть обход длины r [4, теорема 1], то найдем длину r минимального обхода R.

Рассмотрим случай, когда граф G не имеет эйлерова пути, поскольку иначе этот граф имеет обход длины m. Тогда в графе G существуют ребра, проходимые в R более чем один раз.

Построим обход графа G, используя алгоритм решения задачи китайского почтальона.

Пусть V^* — множество нечётных вершин графа G. Так как G не содержит эйлеровых цепей, то число таких вершин больше двух и чётное.

Пусть M — множество цепей между концевыми вершинами v_i и v_j, $v_i, v_j \in V^*$, $i \neq j$, в графе G, таких, что никакие две цепи не имеют одинаковых концевых вершин и каждая вершина из V^* является концом какой-нибудь цепи. Такое множество цепей называется цепным паросочетанием; количество цепей в M равно $|V^*|/2$.

Следуя [7], строим все минимальные (по числу рёбер) цепные паросочетания на множестве нечётных вершин V^* графа G. В силу минимальности никакие две цепи в таком паросочетании не имеют общих рёбер. Выберем цепь наибольшей длины из всех минимальных цепных паросочетаний. Пусть это будет цепь длины k из цепного паросочетания M^*, соединяющая вершины u и v. Далее удвоим все ребра, входящие в M^*, кроме рёбер, входящих в цепь максимальной длины.

Таким образом, получим мультиграф G^* с двумя нечётными вершинами u и v. Мультиграф G^* имеет эйлеров путь из u в v (или из v в u). Следовательно, граф G имеет минимальный обход R длины $m+l-k$, где l — количество рёбер в минимальном цепном паросочетании M^* на множестве нечётных вершин V^* графа G. Значит, $p(G) = m + l - k$. ■

Полный граф с n вершинами обозначается K_n. Каждая его вершина имеет степень $n-1$. Число рёбер в графе K_n равно $n(n-1)/2$.

Следствие 1. Для полного графа K_n имеем:

1) $p(K_n) = n(n-1)/2$, если n нечётно;
2) $p(K_n) = n^2/2 - 1$, если n чётно.

Доказательство. Первый случай очевиден, так как полный граф с нечётным количеством вершин эйлеров.

Во втором случае используем результат теоремы 2: $p(G) = m + l - k$. Так как все вершины полного графа K_n при чётном n являются нечётными, то $l = n/2$. Используя тот факт, что в полном графе каждая вершина соединена со всеми другими, получаем $k = 1$. В итоге имеем $p(G) = n(n-1)/2 + n/2 - 1 = n^2/2 - 1$. ■

Звезда — это граф, все ребра которого инцидентны одной и той же вершине. Звезду с m рёбрами будем обозначать S_m.

Следствие 2 (см. также [4]). Для звезды S_m имеем $p(S_m) = 2m - 2$.

Доказательство. Так как у звезды S_m нечётными будут либо все вершины, либо m вершин, то все ребра звезды S_m входят в минимальное цепное паросочетание на множестве её нечётных вершин, то есть $l = m$. Наибольшая длина цепи в паросочетании равна 2. Таким образом, $p(G) = m + l - k = m + m - 2 = 2m - 2$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 367 с.

2. *Мирзаянов М. Р.* Сильно связные конгруэнции ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Вып. 7. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. С. 104–114.
3. *Мирзаянов М. Р.* О минимальных сильно связных конгруэнциях ориентированных цепей // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6. Вып. 1/2. С. 91–95.
4. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 96–100.
5. *Duncan B. and Peele R.* Bell and Stirling numbers for Graphs // J. Integ. Sequenc. 2009. V. 12. Article 09.7.1.
6. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. С. 227–239.
7. *Bellman R. and Cooke K. L.* The Konigsberg bridges problem generalized // J. Math. Anal. Appl. 1969. No. 25. P. 1–7.