ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОРГРАФОВ С ТРЕМЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ДУГАМИ В МИНИМАЛЬНОМ ВЕРШИННОМ 1-РАСШИРЕНИИ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

E-mail: mic@rambler.ru

Описаны все орграфы, минимальное вершинное 1-расширение которых имеет в точности три дополнительных ребра.

Ключевые слова: *граф, минимальное вершинное 1-расширение, точное вершинное 1-расширение, оптимальная отказоустойчивая реализация.*

Введение

Ориентированным графом (далее — *орграфом*) называется пара $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, называемое множеством вершин, а α — отношение на множестве вершин V, называемое отношением смежности. Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом.* Далее используются основные понятия преимущественно в соответствии с работой [1].

Симметризацией орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется неорграф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1}) \backslash \Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг рёбрами и удалением петель.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Построение МВ-kР можно представить как добавление к исходному графу k дополнительных вершин и некоторого числа дополнительных рёбер. Это число дополнительных рёбер иногда называют *рёберной стоимостью* (edge cost) и обозначают $\mathrm{ec}(G, k)$.

Граф G^* называется *точным вершинным k-расширением* (ТВ-kР) графа G, если граф G изоморфен каждому подграфу графа G^*, получающемуся из него удалением любых его k вершин и всех связанных с ними дуг (рёбер).

В данной работе рассматривается случай $k = 1$.

Понятие МВ-kР введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое предложено Хейзом в работе [2]. Оказалось, что задача является вычислительно сложной [3]. Исследования данной проблемы развивались в двух направлениях. Основное направление — поиск минимальных расширений для интересных классов графов: цепей, циклов, деревьев. Второе — описание графов, минимальные расширения которых имеют заданное число дополнительных дуг или рёбер. В работе [4] исследована задача описания неориентированных графов с $\mathrm{ec}(G, 1) \leqslant 3$. Получены следующие результаты (теоремы 1–5).

Теорема 1. МВ-kР, причём единственное с точностью до изоморфизма, вполне несвязного n-вершинного графа O_n есть вполне несвязный $(n + k)$-вершинный граф O_{n+k}. Никакие другие графы не могут иметь МВ-kР с нулевым числом дополнительных рёбер.

Теорема 2. Графы со степенным множеством $\{1, 0\}$, и только они, имеют МВ-1Р с одним дополнительным ребром, причём это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

Теорема 3. Среди связных графов только цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение единственно с точностью до изоморфизма.

Теорема 4. Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 1$ имеют МВ-1Р с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение имеет вид $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$, и оно единственно с точностью до изоморфизма.

Теорема 5. Связные графы, имеющие МВ-1Р с тремя дополнительными рёбрами, могут иметь только следующий вид:

1) полный граф K_3;
2) графы с вектором степеней вида $(3, \ldots, 3, 2, 2, 2)$, имеющие ТВ-1Р;
3) графы с вектором степеней $(3, 3, 3, \ldots, 3, 2, \ldots, 2, 1)$ особого вида.

В данной работе изучается аналогичный вопрос для ориентированных графов. В [5] показана связь между МВ-1Р неориентированных и ориентированных графов.

Лемма 1. Пусть орграф G^* есть МВ-kР орграфа G. Тогда симметризация орграфа G^* является вершинным k-расширением симметризации орграфа G.

Следствие. Число дополнительных дуг МВ-kР орграфа G не меньше числа дополнительных рёбер МВ-kР симметризации орграфа G.

В работе [6] удалось полностью описать орграфы с $\mathrm{ec}(G, 1) \leqslant 2$. Далее рассмотрим случай $\mathrm{ec}(G, 1) = 3$.

Основные результаты

Рассмотрим только связные орграфы без петель.

Лемма 2. В симметризации МВ-1Р ориентаций цепей вершины степени 3 не могут быть смежны с тремя вершинами степени 2.

Доказательство. Допустим, от противного, что есть МВ-1Р некоторой ориентации цепи и его симметризация имеет вершину степени 3, смежную с тремя вершинами степени 2. Тогда, удалив эту вершину степени 3, получим три вершины степени 1. Очевидно, что цепь сюда вложить нельзя. ■

Теорема 6. Не существует ориентаций цепей с числом вершин $n > 4$, таких, что их МВ-1Р имеет три дополнительных дуги.

Доказательство. Рассматривать гамильтоновы цепи здесь не будем, потому что выше доказано, что такие цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами.

В симметризации МВ-1Р цепи не может быть вершин со степенью меньше 2. По условию теоремы, МВ-1Р должно иметь три дополнительные дуги. Построить МВ-1Р с тремя дополнительными дугами можно по одной из схем на рис. 1 (на иллюстрации ориентации дуг не указаны).

По лемме 2 схемы d и e не являются МВ-1Р цепи.

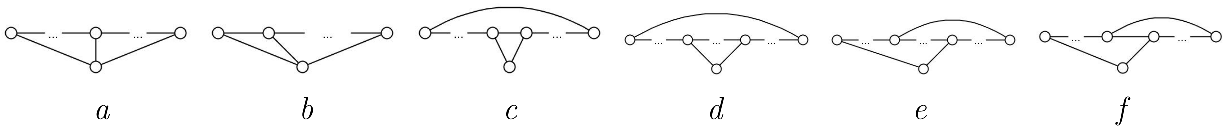

Рис. 1. Схемы построения МВ-1Р для цепи

Будем считать, что в цепи 7 или более вершин. Для 5- и 6-вершинных цепей непосредственной проверкой можно убедиться, что для них МВ-1Р с тремя дополнительными дугами не существует.

Рассмотрим первую схему. Выберем две вершины в этой схеме (v_1 и v_2, рис. 2), суммы полустепеней исхода и захода у которых равны 2.

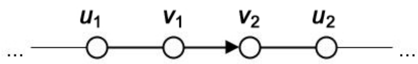

Рис. 2. Схема a, дуга из v_1 в v_2

Пусть дуга между v_1 и v_2 направлена так, как изображено на рис. 2. Ориентации остальных дуг не имеют значения. Тогда при удалении вершины u_1 получим, что один конец цепи имеет полустепени (1,0). А если удалим u_2, то получим, что второй конец цепи имеет полустепень (0,1). Аналогично и для других схем.

Рассмотрим схему a. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени: u_1 — (1,0), u_n — (0,1). Рассмотрим дугу между u_2 и u_3. Предположим, что она идёт из u_2 в u_3. Удалим вершину u_{n-2}. Тогда u_{n-1} становится концом (1,0) и, следовательно, дуга из u_n направлена в u_{n+1} (рис. 3).

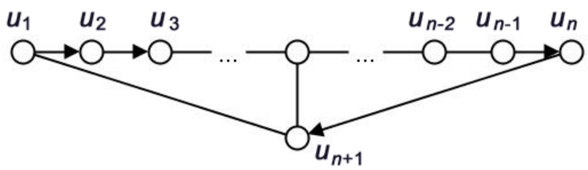

Рис. 3. Схема a, дуга из u_n в u_{n+1}

И так далее — с помощью удаления вершин определяем, как должны быть ориентированы дуги цепи. В итоге получим, что цепь гамильтонова. Гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами, поэтому данная схема не подходит.

Теперь предположим, что дуга идет из u_3 в u_2 (рис. 4). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим u_{n-3}; вершина u_{n-2} теперь не может быть концом (1,0), потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из u_{n-1} уже выходит одна дуга. Значит, вершина u_{n-2} после удаления u_{n-3} имеет полустепени (0,1).

Удалим вершину u_{n-2}. Тогда u_{n-1} станет концом (1,0), а u_n должна быть стоком, то есть дуга направлена из u_{n+1} в u_n. И так далее, удаляя вершины, будем определять направления дуг. В результате получим, что все вершины цепи — источники или стоки. Отсюда следует, что в цепи чётное число вершин, потому что концы цепи разные.

Определим направление дуги между u_{n+1} и u_1. Для этого удалим, например, u_{n-1}. Тогда получаем, что дуга направлена из u_{n+1} в u_1.

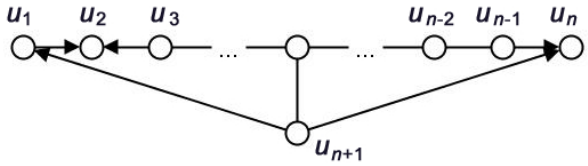

Рис. 4. Схема a, дуга из u_{n+1} в u_1

В данном случае цепь будет строиться как $u_n - u_{n+1} - u_1 - u_2 -$ и т. д., но в такой цепи вершина u_1 не сток и не источник. Получили противоречие. Следовательно, данная схема не подходит.

Рассмотрим схему b. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени: u_1 — (1,0), u_n — (0,1). Рассмотрим дугу между u_2 и u_3. Предположим, что она идёт из u_2 в u_3. Удалим вершину u_{n-2}. Тогда u_{n-1} становится концом (1,0) и, следовательно, дуга из u_n направлена в u_{n+1} (рис. 5).

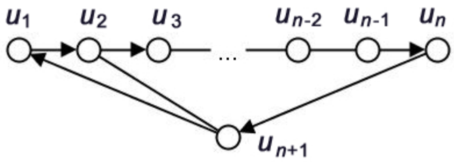

Рис. 5. Схема b, дуга из u_n в u_{n+1}

И так далее — с помощью удаления вершин определяем, как должны быть ориентированы дуги цепи. И в итоге получим, что цепь гамильтонова. Гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами, поэтому данная схема не подходит.

Теперь предположим, что дуга идет из u_3 в u_2 (рис. 6). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим u_{n-3}. Вершина u_{n-2} теперь не может быть концом (1,0), потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из u_{n-1} уже выходит одна дуга. Значит, вершина u_{n-2} после удаления u_{n-3} имеет полустепени (0,1).

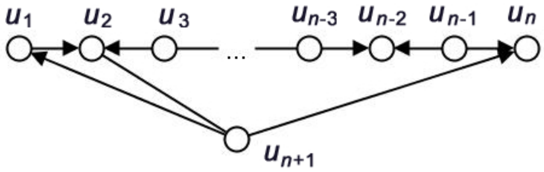

Рис. 6. Схема b, дуга из u_{n+1} в u_1

Теперь удалим вершину u_n, и так далее. В результате получим, что цепь должна состоять только из стоков и источников. У цепи концы разные, поэтому вершин в ней должно быть чётное количество.

Удалим вершину u_{n-2}. Тогда u_{n-1} станет концом (1,0), а u_n должна быть стоком, т. е. дуга направлена из u_{n+1} в u_n. Удалим u_{n-1} и получим направление ещё одной дуги — дуга из u_{n+1} направлена в u_1.

В данном случае цепь будет строиться как $u_n - u_{n+1} - u_1 - u_2 -$ и т. д., но в такой цепи вершина u_1 не сток и не источник. Получили противоречие. Следовательно, данная схема не подходит.

Рассмотрим схему c. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени: u_1 — (1,0), u_n — (0,1). Удалим первую вершину u_1. Второй конец цепи останется прежним, значит, ребро $\{u_2, u_3\}$ направляем из u_2 в u_3: (u_2, u_3). И так далее. Получим в итоге, что цепь должна быть гамильтоновой, а гамильтоновы цепи имеют МВ-1Р с двумя дополнительными дугами. Значит, данная схема не подходит.

Рассмотрим схему f. Пусть концы этой цепи имеют следующие полустепени: u_1 — (1,0), u_n — (0,1). Рассмотрим дугу между u_2 и u_3. Предположим, что она идёт из u_2 в u_3 (рис. 7). Если удалить вершину u_{n-2}, то получим направление дуги между u_n и u_i: из u_n в u_i.

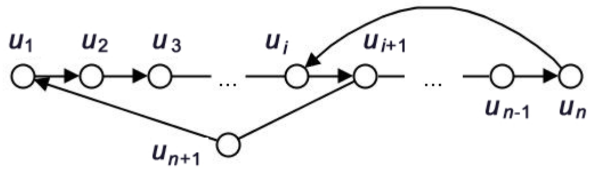

Рис. 7. Схема f, дуга из u_n в u_i

Если удалить вершину u_1, то u_2 станет концом (1,0) и дуга между u_3 и u_4 будет направлена из u_3 в u_4. И так продолжаем до тех пор, пока не дойдём до u_i. Имеем, что первые $i-1$ дуги направлены «в одну сторону». При удалении вершины u_{i-2} цепь будет строиться как $u_{i-1} - u_i - u_n -$ и т. д. Получаем противоречие, потому что дуга направлена из u_n в u_i, а по нашему предположению, она должна быть направлена в обратную сторону.

Теперь предположим, что дуга идет из u_3 в u_2 (рис. 8). Тогда в цепи вторая вершина — сток. Удалим вершину u_{n-2}. Тогда дуга между u_n и u_i должна быть направлена из u_i в u_n.

Удалим u_{n-3}. Тогда вершина u_{n-2} теперь не может быть концом (1,0), потому что с ней должна быть смежна вершина-сток, а из u_{n-1} уже выходит одна дуга. Значит, вершина u_{n-2} после удаления u_{n-3} имеет полустепени (0,1).

И так далее. В результате получаем, что все вершины цепи должны быть стоками или источниками. Вершин в цепи должно быть чётное число, так как концы цепи разные.

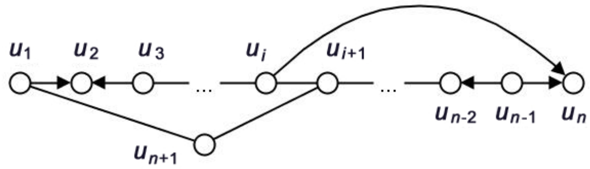

Рис. 8. Схема f, все вершины должны быть стоками или источниками

Рассмотрим дугу из u_i в u_n. При удалении вершины u_{i+1} эта дуга входит в цепь. Вершина u_n — сток, а вершина u_i должна быть источником, т. е. рассматриваемая дуга выходит из нее. Если u_i — сток, то построенный по схеме орграф не является МВ-1Р. Предположим, что u_i — источник. Тогда u_{i+1} — сток. Получается противоречие, если удалить u_i и рассмотреть дугу между u_{i+1} и u_n: обе вершины должны быть стоками, так как в них входят дуги. Но рассматриваемая дуга может иметь только одну ориентацию, поэтому можно сделать вывод, что такая схема тоже не подходит для построения МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. ■

В работе [7] доказывается следующее утверждение:

Теорема 7. Если в точном вершинном 1-расширении связного графа есть сток или источник, то этот граф является транзитивным турниром.

Напомним, что граф называется *кубическим*, если все его вершины имеют степень 3. В п. 2 теоремы 5 упоминаются графы с вектором степеней вида $(3, \dots, 3, 2, 2, 2)$, имеющие точное вершинное 1-расширение. Эти точные вершинные 1-расширения имеют вектор степеней $(3, \dots, 3)$, то есть являются кубическими графами.

Теорема 8. Среди всех ориентаций кубических графов только транзитивный 4-вершинный турнир является точным вершинным 1-расширением.

Доказательство. Пусть G — кубический граф, H — его ориентация, являющаяся точным вершинным 1-расширением. Рассмотрим, какие степени исхода и захода могут иметь вершины графа H: (0,3), (1,2), (2,1) и (3,0). С учётом теоремы 7 получаем, что степени (0,3) и (3,0) могут быть только у ориентации полного графа в транзитивный турнир. Однако из кубических графов только K_4 является полным.

Пусть G не изоморфен K_4. Тогда в H могут быть только вершины со степенями исхода и захода (1,2) и (2,1). Легко видеть, что их число должно быть одинаковым. В самом деле, если бы это было не так и число вершин вида (1,2) было k_1, а вершин вида (2,1) — k_2, то число исходящих дуг было бы $k_1 + 2k_2$, а входящих — $2k_1 + k_2$. Эти числа должны быть равны, то есть $k_1 + 2k_2 = 2k_1 + k_2$, откуда $k_1 = k_2$.

Итак, в графе H одинаковое число вершин вида (1,2) и (2,1). Так как H является точным вершинным 1-расширением, то все его максимальные подграфы изоморфны. Обозначим через u произвольную вершину вида (1,2). Рассмотрим граф, получающийся из H удалением вершины, в которую идет дуга из вершины u. В этом графе вершина u имеет полустепени исхода и захода (0,2). Таким образом, в любом максимальном подграфе графа H должна быть вершина вида (0,2). Но такая вершина может получиться только при удалении вершины, в которую идёт дуга из вершины вида (1,2) графа H. Следовательно, в каждую вершину графа H должна идти дуга из подходящей вершины вида (1,2). Но это невозможно, так как количество вершин графа H в 2 раза больше, чем количество исходящих дуг из вершин вида (1,2). Таким образом, единственная возможная ориентация кубического графа, являющаяся точным вершинным 1-расширением, — транзитивный 4-вершинный турнир. ■

Теорема 9. Среди ориентаций графов из теоремы 5 только граф K_3 имеет такую ориентацию (транзитивный турнир), МВ-1Р которой имеет три дополнительные дуги.

Доказательство. Граф из первого случая теоремы 5 — граф K_3. Известно, что у такого графа есть ориентация — транзитивный турнир, которая имеет МВ-1Р с тремя дополнительными дугами (4-вершинный транзитивный турнир) [8].

Выше доказано, что ориентации графов из второго случая теоремы 5 не имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами.

Остаётся рассмотреть последний, третий, случай теоремы 5. Это графы с вектором степеней $(3, 3, 3, \dots, 3, 2, \dots, 2, 1)$ особого вида. В работе [4] даётся описание графов такого вида и их МВ-1Р. Рассмотрим граф G такого вида и его МВ-1Р — граф G^*. Граф G^* должен обладать следующими свойствами:

1) степенное множество $\{3, 2\}$;
2) количество вершин степени 3 чётно и больше 3;

3) вершины степени 2 смежны либо с двумя вершинами степени 3, либо с одной вершиной степени 3 и одной вершиной степени 2, то есть вершины степени 3 соединяются цепью, состоящей не более чем из трёх ребер;
4) вершины степени 3 смежны с двумя другими вершинами степени 3, причем граф, индуцированный всеми вершинами степени 3, представляет собой цикл.

То есть граф G^* можно представить как цикл, образованный вершинами степени 3, с которыми соединены цепи длины 1 или 2 (рис. 9).

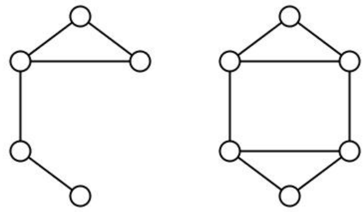

Рис. 9. Пример графа G и его МВ-1Р G^*

При удалении вершины степени 3 из графа G^* получим в точности исходный граф G. Предположим, что существует ориентация графа G^*, такая, что она является МВ-1Р подходящего графа G с тремя дополнительными дугами.

Рассмотрим случай, когда граф G^* представляет собой цикл, в которому присоединены цепи длины 1 (рис. 10).

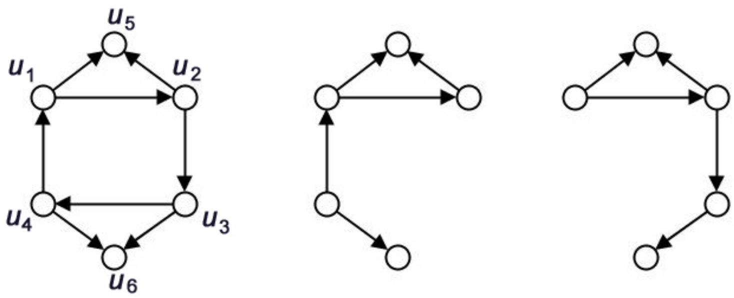

Рис. 10. Пример графа G^* и подграфы, получающиеся при удалении вершин степени 3

Дуги, инцидентные вершинам u_5 и u_6, должны быть ориентированы одинаковым образом. Предположим, что вершины u_5 и u_6 — стоки. Цикл может быть ориентирован как гамильтонов либо как негамильтонов. Если цикл гамильтонов, то при удалении u_1 и при удалении u_2 получим неизоморфные графы, что показано на рис. 10.

Если цикл не гамильтонов, то логично предположить, что он должен быть ориентирован таким образом, чтобы удаление u_1 и удаление u_2 давали изоморфные графы. Но по схеме построения МВ-1Р цикл состоит из вершин степени 3, то есть можно найти две такие вершины степени 3, смежные друг с другом, но соединённые с двумя разными цепями. В данном примере это u_1 и u_4. Если дуга направлена из u_4 в u_1, то при удалении u_2 и u_3 опять получаем неизоморфные графы.

Аналогично рассматривается предположение, что вершины u_5 и u_6 — источники.

Если вершины u_5 и u_6 имеют полустепени (1,1), то при удалении u_1 и удалении u_2 опять получим неизоморфные графы, так как в этих графах u_5 будет иметь разные полустепени — (0,1) и (1,0).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда граф G^* выглядит как цикл, в которому присоединены цепи длины 2.

Таким образом, ориентации графов из третьего случая теоремы 5 также не имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. ■

Теорема 10. Среди связных орграфов только четыре имеют МВ-1Р с тремя дополнительными дугами: 3-вершинный транзитивный турнир, две 3-вершинные цепи и одна 4-вершинная цепь.

Доказательство. Используя доказанные выше теоремы, получаем, во-первых, что 3-вершинный транзитивный турнир имеет МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. Во-вторых, непосредственной проверкой можно убедиться, что среди цепей с числом вершин меньше 5 есть три цепи, имеющие МВ-1Р с тремя дополнительными дугами. Эти графы и их МВ-1Р приведены на рис. 11.

Рис. 11. Графы из теоремы 10 и их МВ-1Р

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
3. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
4. *Абросимов М. Б.* Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.
5. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 2. С. 93–102.
6. *Абросимов М. Б., Моденова О. В.* Характеризация орграфов с малым числом дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 2. С. 3–9.
7. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* О бесконтурных точных расширениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10. Вып. 1. С. 3–9.
8. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2006. № 17. С. 187–190.