Секция 7

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ ЦИКЛОВ С ВЕРШИНАМИ ДВУХ ТИПОВ

М. Б. Абросимов, П. П. Бондаренко

Неориентированным графом называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение смежности на множестве вершин V. Здесь и далее основные определения даются по работе [1].

Будем рассматривать неориентированные графы, в которых вершины имеют разные типы или окрашены в разные цвета.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, при котором сохраняются типы вершин и для всех $u, v \in V_1$ выполняется условие: если $(u, v) \in \alpha_1$, то $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \alpha_2$.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (МВ-kР) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов, если выполняются следующие условия:

1) G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вложи́м в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) G^* содержит $n + k \cdot p$ вершин;

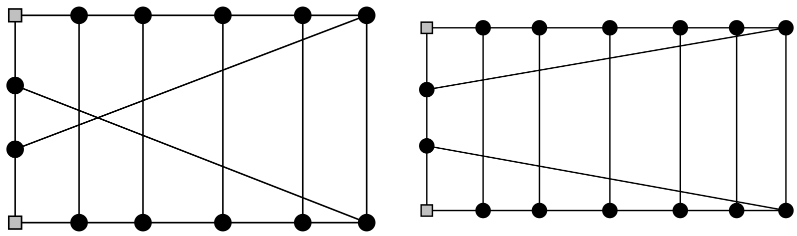
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Отказоустойчивость — способность системы противостоять ошибке и возможность продолжать работу в присутствии этой ошибки. Дж. П. Хейз в работе [2] предложил графовую модель для построения отказоустойчивых реализаций заданной системы. Он рассмотрел минимальные вершинные k-расширения для цепей и циклов с однотипными вершинами, а также минимальные вершинные 1-расширения деревьев с вершинами разного типа. В данной работе рассматриваются циклы с вершинами двух типов: одна вершина первого типа, а остальные вершины — другого типа. Удалось получить следующие результаты.

Теорема 1. Минимальные вершинные 1-расширения цикла C_n с вершинами двух типов (одна вершина первого типа, а остальные вершины — другого типа) имеют $(3n + 4)/2$ ребер при четном n и $(3n + 5)/2$ — при нечетном n.

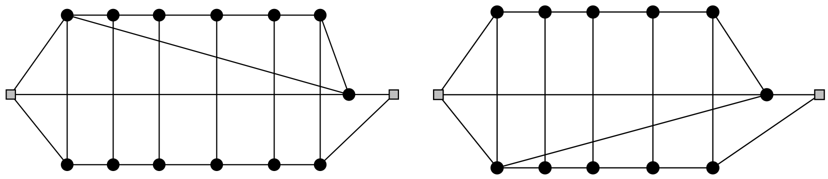
Теорема 2. Одно из минимальных вершинных 1-расширений цикла C_n с вершинами двух типов (одна вершина первого типа, а остальные вершины — другого типа) имеет вид, показанный на рис. 1,*а* для $n = 4k$; на рис. 1,*б* — для $n = 4k+2$; на рис. 2,*а* — для $n = 4k + 1$ и на рис. 2,*б* — для $n = 4k + 3$.

Выполнен компьютерный эксперимент, в результате которого сгенерированы все неизоморфные минимальные вершинные 1-расширения рассматриваемых циклов с числом вершин до 8. Полученные данные представлены в таблице.



а *б*

Рис. 1. МВ-1Р цикла C_n при чётных n



а *б*

Рис. 2. МВ-1Р цикла C_n при нечётных n

Количество минимальных вершинных 1-расширений C_n

$\|V\|$	m	Количество МВ-1Р
3	8	1
4	8	1
5	11	7
6	11	1
7	14	60
8	14	2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6(493). С. 3–11.
2. *Heyes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.

УДК 519.17

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТОЧНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ

М. Б. Абросимов, А. А. Долгов

Граф с симметричным и антирефлексивным отношением смежности называется *неориентированным графом* (далее *неографом*). Граф с антисимметричным отношением смежности называется *направленным графом* или *диграфом*.

Граф G^* называется *точным вершинным k-расширением* графа G, если любой граф, получающийся удалением произвольных k вершин графа G^*, изоморфен графу G.

Точное вершинное k-расширение является частным случаем минимального вершинного k-расширения. Известно, что в общем случае граф может иметь много неизоморфных минимальных вершинных k-расширений. В работе [1] доказывается, что если неограф с числом вершин $n > 1$ имеет точное вершинное k-расширение, то оно является и его минимальным вершинным k-расширением, более того, неограф с числом вершин $n > 1$ может иметь только одно точное вершинное k-расширение. Если бы оказалось, что некоторый граф G имеет два или более точных вершинных 1-расширения, то эти графы были бы нереконструируемыми, так как они имели бы одинаковый набор максимальных подграфов, который состоит из единственного графа G. Для ориентированных графов ситуация оказывается более сложной, так как, с одной стороны, нет полного описания общего вида точных вершинных k-расширений, а с другой стороны, известно, что существуют нереконструируемые орграфы.

Пара 3-вершинных турниров (циклическая тройка и транзитивная тройка) являются неизоморфными точными вершинными 1-расширениями одного и того же 2-вершинного турнира. Для точных вершинных 1-расширений с числом вершин больше 3, являющихся транзитивными турнирами или вершинно-симметрическими орграфами, единственность доказана [2, 3]. В этих же работах описываются результаты вычислительного эксперимента, который показал, что все точные вершинные 1-расширения орграфов с числом вершин $2 < n \leqslant 12$ являются единственными.

Известно, что орграфы в общем случае являются нереконструируемыми. Так, семействами нереконструируемых диграфов являются шесть семейств Стокмейера [4]. Удалось установить следующий результат.

Теорема 1. Диграфы из семейств Стокмейера не являются точными вершинными 1-расширениями никаких орграфов.

Полученный результат означает, что если существует орграф с числом вершин больше 2, который имеет два или более неизоморфных точных вершинных 1-расширения, то число вершин этого орграфа не менее 13, а его точные вершинные 1-расширения являются нереконструирумыми и не входят ни в одно известное семейство нереконструируемых орграфов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения дополнений графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 4. С. 11–19.
2. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения транзитивных турниров // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2006. № 17. С. 187–190.
3. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2007. № 23. С. 211–216.
4. *Stockmeyer P.* A Census of non-reconstructable digraphs, I: six related families // J. Combinat. Theory. 1981. V. 31. P. 232–239.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ ДВУХ СЕМЕЙСТВ ДЕРЕВЬЕВ

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Ациклический связный граф называется *деревом.* Дерево называется *сверхстройным*, если все его вершины, кроме корня и листьев, имеют степень 2. Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей $P_{l_1}, \ldots, P_{l_k}$ с общей концевой вершиной. Для однозначного задания сверхстройного дерева достаточно указать длины этих цепей: $(l_1 - 1, \ldots, l_k - 1)$.

Задача описания минимальных реберных k-расширений для произвольного графа является вычислительно сложной [1], однако среди деревьев есть представители некоторых хорошо известных семейств графов, для которых известны аналитические решения. Например, *цепь* P_n является частым случаем дерева.

Теорема 1 [2]. Единственное минимальное реберное 1-расширение цепи P_n есть цикл C_n.

Звезда является частным случаем сверхстройного дерева (звезда — сверхстройное дерево, в котором нет вершин степени 2).

Теорема 2 [3]. Минимальное реберное 1-расширение звезды $K_{1,k}$ единственно с точностью до изоморфизма и получается соединением двух листьев звезды со всеми остальными листьями звезды и между собой.

Помимо этих двух результатов, на основе проведенного вычислительного эксперимента, результаты которого были частично описаны в [4], удалось выделить два семейства деревьев, для которых также возможно аналитически построить минимальные реберные 1-расширения. В работе [5] рассматривались деревья, которые представляют собой одинаковые звезды с соединенными центрами. Удалось получить новый результат для деревьев подобного вида.

Теорема 3. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ состоит из двух звезд с соединенными центрами (рис. 1). Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: выберем две произвольные вершины степени 1, расстояние между которыми равно 3; каждую из выбранных вершин соединим со всеми вершинами степени 1, расстояние до которых от неё равно 3. Полученный граф G^* является минимальным реберным 1-расширением графа G.

Теорема 4. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — сверхстройное дерево, являющееся объединением k цепей длины 2 и $n > 1$ цепей длины 1 (рис. 2). Построим граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ из G по следующей схеме: соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если n четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если n нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трёх уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф G^* является минимальным реберным 1-расширением графа G.

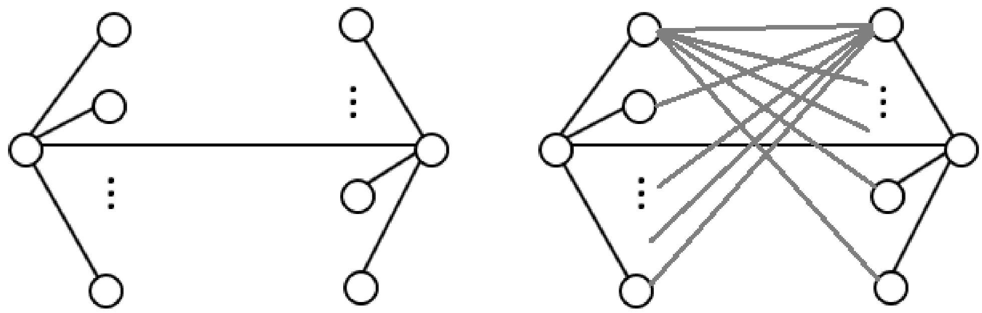


Рис. 1. Дерево G и его минимальное реберное 1-расширение

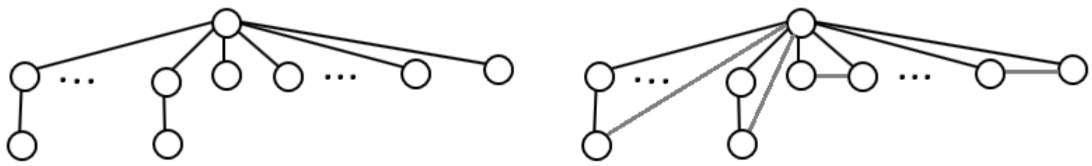


Рис. 2. Сверхстройное дерево G и его минимальное реберное 1-расширение

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
2. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения неориентированных звезд // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2006. Вып 7. С. 3–5.
4. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Минимальные реберные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин // Саратов: Саратов. гос. ун-т, 2010. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010 № 589–В2010.
5. *Кабанов М. А.* Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов, 1997. Вып.1. С.50–58.

УДК 519.17

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ РАСШИРЕНИЙ ОРГРАФОВ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Симметризацией орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется неограф $G = (V, (\alpha \cup \alpha^{-1})\backslash\Delta)$, то есть симметризация орграфа получается заменой дуг ребрами и удалением петель.

В работе [1] удалось найти некоторые связи точных вершинных k-расширений орграфов с точными вершинными k-расширениями неографов. Приведем некоторые из полученных результатов.

Теорема 1. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — точное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда отношения смежности α и α^* являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.

Теорема 2. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — точное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда симметризация $\overrightarrow{G}^*$ является точным вершинным k-расширением симметризации $\overrightarrow{G}$.

Теорема 3. Пусть $\overrightarrow{G}$ — диграф с числом вершин больше 1, тогда его точное вершинное k-расширение, если оно есть, также будет диграфом.

Теорема 4. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — точное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда дополнение $\overrightarrow{G}^*$ является точным вершинным k-расширением дополнения $\overrightarrow{G}$.

Обратным орграфом, или *обращением* орграфа $\overrightarrow{G} = (V, \alpha)$ называется орграф $\overrightarrow{H} = (V, \beta)$, получающийся заменой ориентации всех дуг $\overrightarrow{G}$: $\beta = \alpha^{-1} = \{(u, v) \in \in V \times V : (v, u) \in \alpha\}$.

Теорема 5. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — точное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда обращение $\overrightarrow{G}^*$ является точным вершинным k-расширением обращения $\overrightarrow{G}$.

Точное вершинное k-расширение является частным случаем минимального вершинного k-расширения. При переходе к минимальным вершинным k-расширениям от точных вершинных k-расширений некоторые из полученных свойств сохранились. Удалось получить следующие результаты.

Теорема 6. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — минимальное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда отношения смежности α и α^* являются одновременно либо рефлексивными, либо антирефлексивными.

Теорема 7. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — минимальное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда симметризация $\overrightarrow{G}^*$ является вершинным k-расширением симметризации $\overrightarrow{G}$.

Теорема 8. Пусть $\overrightarrow{G}^*$ — минимальное вершинное k-расширение орграфа $\overrightarrow{G}$. Тогда обращение $\overrightarrow{G}^*$ является минимальным вершинным k-расширением обращения $\overrightarrow{G}$.

Отдельный интерес представляет случай, когда минимальное вершинное k-расширение диграфа также является диграфом. Был проведен вычислительный эксперимент по построению минимальных вершинных k-расширений всех диграфов с числом вершин до 6. В работе рассматриваются полученные в ходе эксперимента результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б., Долгов А. А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестник Томского госуниверситета. Приложение. 2007. №23. С. 211–216.

УДК 519.178

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ДРЕВОВИДНОЙ ШИРИНЫ ГРАФА

В. В. Быкова

Древовидная ширина — числовой параметр, характеризующий меру древовидности графа. Графы с ограниченной древовидной шириной образуют специальный класс графов, называемых частичными k-деревьями. Этот класс графов был введен четверть века назад Н. Робертсоном и П. Д. Сеймуром [1]. Широкий интерес к изучению древовидной ширины графа вызван тем, что многие NP-трудные задачи теории графов, возникающие в различных приложениях, в том числе при моделировании надежности и безопасности компьютерных и коммуникационных систем, полиномиально разрешимы, если модельный граф — частичное k-дерево. В этих условиях процесс решения задачи может быть организован по принципу «разделяй и властвуй», причем алгоритмическая эффективность достигается за счет разложения модельного графа на части с помощью небольших (мощности не более k) сепараторов [2].

Древовидная ширина графа вычисляется через специальную графовую структуру, которая называется деревом декомпозиции. Дерево декомпозиции графа $G = (V, E)$ представляет собой пару $(\mathcal{X}, T)$, где $\mathcal{X} = \{X_i : i \in I\}$ — семейство подмножеств множества V, называемых «мешками», а $T = (I, W)$ — дерево, узлам которого сопоставлены эти «мешки», и выполняются следующие условия:

1) $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = V$;
2) для всякого ребра графа G обязательно имеется хотя бы один «мешок», содержащий обе вершины этого ребра;
3) для любой вершины $v \in V$ графа G множество узлов $\{i \in I : v \in X_i\}$ индуцирует связный подграф, являющийся поддеревом дерева T.

Ширина дерева декомпозиции $(\mathcal{X}, T)$ равна $\max\limits_{i \in I}\{|X_i| - 1\}$. Древовидная ширина (*treewidth*) графа G определяется как наименьшая ширина всех допустимых его деревьев декомпозиции и обозначается через $\mathrm{tw}(G)$. Дерево декомпозиции $(\mathcal{X}, T)$ ширины $\mathrm{tw}(G)$ называется оптимальным деревом декомпозиции графа G. Заметим, что для каждого связного графа G множество возможных деревьев декомпозиции не пусто и конечно. Когда граф G несвязен, то полагают $\mathrm{tw}(G) = 0$. Следовательно, древовидная ширина $\mathrm{tw}(G)$ может быть вычислена для любого конечного графа G.

При условии связности графа $G = (V, E)$ верны естественные границы значений древовидной ширины: $1 \leqslant \mathrm{tw}(G) \leqslant |V| - 1$. Древовидная ширина отражает, насколько близок граф G к дереву, и определяет размеры его клик и сепараторов: чем меньше $\mathrm{tw}(G)$, тем ближе граф G к дереву и тем меньше у него по мощности клики и сепараторы. Так, все n-вершинные деревья ($n \geqslant 2$) имеют единичную древовидную ширину, размер всякой клики такого дерева равен 2, а каждый сепаратор — точка сочленения. Считается, что граф G обладает ограниченной древовидной шириной, если $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$ и k — положительная целая константа, не зависящая от $|V|$. Например, если G — последовательно-параллельный граф, то $\mathrm{tw}(G) \leqslant 2$, а для всякого графа Халина неизменно $\mathrm{tw}(G) \leqslant 3$. Однако значения $\mathrm{tw}(G)$ всегда зависят от $|V|$ для полных графов и графов типа «сетка» — графов, составленных из правильных многогранников.

Установить, имеет ли заданный граф ограниченную древовидную ширину, не всегда просто. В [3] доказана NP-полнота следующей задачи: для графа $G = (V, E)$ и целого числа $0 < k < |V|$ верно ли, что $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$? Данное теоретическое препятствие не мешает на практике вычислять древовидную ширину графа во многих ситуациях. Во-первых, известны точные неполиномиальные по времени алгоритмы нахождения $\mathrm{tw}(G)$, основанные на методе динамического программирования и методе ветвей и границ [4, 5]. Разработаны также FPT-алгоритмы (*Fixed-Parameter Tractable algorithms*) [1, 6], способные при фиксированном k за время $\mathrm{O}(2^k |V|^{\mathrm{O}(1)})$ дать ответ на вопрос: $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$? Во-вторых, найдены алгоритмы полиномиальной сложности для некоторых специальных классов графов (хордальных, последовательно-параллельных и др.) [7, 8]. В-третьих, выявлены необходимые полиномиально проверяемые признаки частичного k-дерева [3]. Так, если $G = (V, E)$ — частичное k-дерево, то

$$|E| \leqslant k|V| - k(k+1)/2.$$

В-четвертых, к настоящему времени предложены различные схемы приближений [9] и эвристические алгоритмы [10], позволяющие за полиномиальное время находить значения, близкие к истинному значению древовидной ширины графа. И наконец, актуальны границы возможных значений древовидной ширины графа и методы их уточнения.

В работе дан краткий обзор современных результатов по проблеме вычисления древовидной ширины. Представлены некоторые нижние и верхние оценки древовидной ширины, связывающие данный параметр с другими числовыми параметрами графа (наименьшей степенью вершины, числом вершинной связности, плотностью, хроматическим числом). Проанализировано их качество и сложность вычисления. Предложены и теоретически обоснованы полиномиальные по сложности алгоритмические методы улучшения этих оценок, основанные на немонотонности числовых параметров графа относительно операции удаления вершин графа и разложении графа сепараторами. В частности, доказано, что дерево блоков и точек сочленения графа G определяет дерево декомпозиции, ширина которого устанавливает верхнюю границу значений для $\mathrm{tw}(G)$.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robertson N. and Seymour P. D.* Graph minors. II. Algorithmic aspects of treewidth // J. Algorithms. 1986. V. 7. P. 309–322.
2. *Kleinberg J. and Tardos E.* Algorithm Design. Boston: Addison-Wesley, 2005.
3. *Arnborg S., Corneil D. G., and Proskurowski A.* Complexity of finding embeddings in a k-tree // SIAM J. Alg. Disc. Math. 1987. V. 8. P. 277–284.
4. *Gogate V. and Dechter R.* A complete anytime algorithm for treewidth // Proc. UAI'04. Uncertainty in Artificial Intelligence. 2004.
5. *Bodlaender H. L., Grigoriev A., and Koster A. M. C. A.* On exact algorithms for treewidth // Proc. 14Th Annual European Symposium on Algorithms ESA. 2006. V. 4168. P. 672–683.
6. *Bodlaender H. L. and Kloks T.* Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs // J. Algorithms. 1996. V. 21. P. 358–402.
7. *Bodlaender H. L. and Rotics U.* Computing the treewidth and the minimum fill-in with the modular decomposition // Algorithmica. 2003. V. 36. P. 375–408.
8. *Broersma H., Dahlhaus E., and Kloks T.* A linear time algorithm for minimum fill-in and tree width for distance hereditary graphs // Disc. Appl. Math. 2000. V. 99. P. 367–400.
9. *Bouchitte V., Kratsch D., Muller H., and Todinca I.* On treewidth approximations // Disc. Appl. Math. 2004. V. 6. P. 183–196.
10. *Clautiaux F., Moukrim A., Negre S., and Carlier J.* Heuristic and meta-heuristic methods for computing graph treewidth // RAIRO Oper. Res. 2004. V. 38. P. 13–26.
11. *Быкова В. В.* Вычислительные аспекты древовидной ширины графов // Прикладная дискретная математика. 2011 (в печати).

УДК 512.5

ОБ АТТРАКТОРАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЦИКЛАМИ

А. В. Власова

Под *конечной динамической системой* понимается пара $(S,\ \delta)$, где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*.

Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Этот граф является функциональным, т. е. из каждой вершины выходит точно одна дуга. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*.

Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров состояний системы без проведения динамики, таких, как индекс (расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние), период (длина соответствующего аттрактора), ветвление (количество непосредственных предшественников) [1] и др. Программа [2] позволяет исследовать некоторые из эволюционных параметров определенных систем. Одной из нерешенных в общем случае задач является вопрос о том, принадлежит ли данное состояние аттрактору, что обозначено, например, в [3, 4].

В данной работе представлены критерий принадлежности состояния аттракторам и описание формирования аттракторов динамических систем двоичных векторов, порожденных такими графами, как циклы.

Пусть имеется n-звенный цикл c. Выберем в нём какую-либо вершину в качестве начальной и обозначим её c_0, тогда цикл можно записать как $c = c_0c_1\ldots c_{n-1}c_n$, где $c_n = c_0$. Придадим каждому ребру цикла произвольную ориентацию. Дуги, имеющие направление по часовой стрелке, пометим символом 1, а дуги с противоположной ориентацией — символом 0.

Таким образом, каждой ориентации цикла сопоставляется n-мерный двоичный вектор. С другой стороны, каждый такой вектор однозначно определяет некоторую ориентацию цикла, так что между множеством C^n, $n > 2$, всевозможных ориентаций n-звенного цикла и множеством B^n всех двоичных векторов размерности n устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Динамическая система $(C^n,\ \theta)$ вводится следующим образом: если дан некоторый граф c из C^n, то его динамическим образом $\theta(c)$ является граф, получаемый из c одновременным превращением всех стоков в источники (SER-динамика бесконтурных графов [3]).

Исходная динамическая система (C^n, θ) оказывается изоморфной динамической системе $(B^n,\ \theta)$, которая вводится следующим образом: пусть состоянием динамической системы (B^n, θ) в данный момент времени является вектор $v \in B^n$, тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, описываемом следующими правилами: 1) если первой компонентой в v является 0 и последней компонентой является 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней компонентой — 0; 2) если в составе v имеются диграммы 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01; 3) других отличий между v и $\theta(v)$ нет. Вышеперечисленные правила применяются одновременно. Будем полагать по определению, что контуры представляют собой аттракторы единичной размерности. На рис. 1 показана карта динамической системы $(B^6,\ \theta)$.

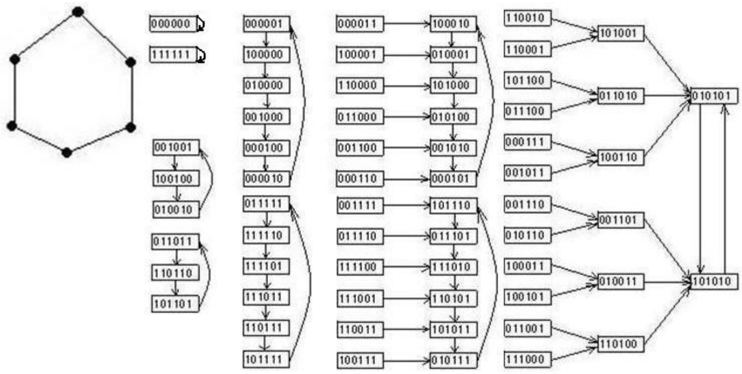


Рис. 1. Карта динамической системы $(B^6,\ \theta)$

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность вектора* v, т. е. количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учётом циклического сдвига. Например, $p_c(111111) = 6$, $p_c(101010) = 0$, $p_c(111011) = 4$, $p_c(\theta(111011)) = p_c(110111) = 4$. Очевидно, что для состояния v системы $(B^n,\ \theta)$ выполняется условие $0 \leqslant p_c(v) \leqslant n$. *Циклический блок* — это максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве $\geqslant 2$ с учетом циклического сдвига. При работе с динамической системой, ассоциированной с циклом, будем под понятием *блок* подразумевать понятие *циклический блок*. *Длина блока* — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через p_c^0, p_c^1 суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

Теорема 1 (критерий принадлежности состояния аттрактору). Вектор динамической системы (B^n, θ) тогда и только тогда принадлежит аттрактору, когда у него $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$. При этом периоды равны делителям числа n, и если $p_c^0 = 0$, то аттрактор представляет собой цикл, в котором следующее состояние получается из предыдущего циклическим сдвигом влево на одну компоненту, а при $p_c^1 = 0$ — вправо.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власова А. В.* Ветвления в конечной динамической системе $(B^n,\ \theta)$ // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: Материалы итог. студ. науч. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 57–58.
2. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидетельство РОСПАТЕНТа № 2009614409, зарегистрировано 20 августа 2009.
3. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
4. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinat. 2004. V. 8. P. 425–439.
5. *Власова А. В.* Аттракторы динамических систем, ассоциированных с циклами // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2. С. 90–95.

УДК 519.7

О САМОЛОКАЛИЗАЦИИ МОБИЛЬНОГО АГЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ

И. С. Грунский, С. В. Сапунов

В качестве топологической модели операционной среды рассматриваются конечные неориентированные графы. Вершины этих графов заранее помечены, и мобильный агент (МА) не меняет эти метки. Рассматривается задача определения МА своего положения в среде. Эта задача относится к проблематике взаимодействия управляющей и управляемой систем, являющейся классической для теоретической кибернетики [1, 2]. В настоящее время эта проблема актуальна в связи с задачами навигации автономных мобильных роботов [3].

Конечным графом с помеченными вершинами (помеченным графом) назовем четверку $G = (V, E, M, \mu)$, где V, E, M — конечные множества вершин, ребер и меток соответственно; $\mu : G \to M$ — сюръективная функция разметки. Помеченный неорграф назовем сильно детерминированным (СД-графом), если в замкнутой окрестности любой его вершины все вершины помечены различно. Языком L_g вершины g назовем множество всех слов, порожденных этой вершиной, т. е. последовательностей меток вершин, лежащих на всевозможных путях с началом в вершине g. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ ε-неотличимы, если $L_g = L_h$. Лингвистическим идентификатором (ЛИ) вершины $g \in V$ назовем конечное множество слов $W_g \subseteq M^+$, таких, что для любой вершины $h \in V$ равенство $W_g \cap L_g = W_g \cap L_h$ выполняется тогда и только тогда, когда $g = h$. Через S_g обозначим подграф графа G, порожденный всеми вершинами, достижимыми из вершины $g \in V$. Будем говорить, что вершины $g, h \in V$ σ-неотличимы, если $S_g \cong S_h$. Пусть G_g и H_h являются инициально-связными помеченными графами с выделенными вершинами g и h соответственно. Обозначим через $G_g \cap H_h$ наибольший связный подграф $G'_g \subseteq G_g$, содержащий выделенную вершину g и изоморфно вложимый в H_h с отображением вершины g в вершину h. Топологическим идентификатором (ТИ) вершины $g \in V$ назовем помеченный граф D_g, такой, что для любой вершины $h \in V$ изоморфизм $D_g \cap S_g \cong D_g \cap S_h$ существует тогда и только тогда, когда $g = h$. Показано, что $\sigma \subseteq \varepsilon$, причем обратное включение не выполняется. Предложены полиномиальные методы построения ЛИ и ТИ вершин помеченных графов. Показано, что гомоморфный образ растущего помеченного дерева, соответствующего ЛИ вершины $g \in V$, является ТИ этой вершины. Показано, что обратное утверждение в общем случае неверно.

Экспериментом с графом G относительно априорной информации I, цели C и средств S назовем процесс, состоящий из трех этапов: 1) построение некоторого теста P на основе I и C; 2) получение мобильным агентом экспериментальных данных W на основе P и S; 3) вывод заключений о свойствах графа на основе W и I. Априорная информация — это класс графов, которому принадлежит G. В качестве S выступают возможности МА перемещаться по ребрам графа от вершины к вершине, оставлять маркер в текущей вершине, а также обнаруживать и подбирать маркер в случае его нахождения в текущей вершине. Эксперимент назовем диагностическим (ДЭ), если априори полностью известен граф G, МА установлен в произвольную начальную вершину этого графа, и целью эксперимента является определение этой вершины, т. е. различение этой вершины от всех других вершин.

В работах [4, 5] авторами были предложены методы построения и реализации ДЭ с помеченными графами, основывающиеся на проверке ε-эквивалентности вершин при помощи их ЛИ. В них в качестве теста P берётся множество слов, являющееся объединением ЛИ всех вершин графа.

В данной работе в качестве теста P используется помеченный граф, называемый далее диагностическим тестовым графом (ДТГ) и определяемый по следующим правилам: 1) отождествим все одинаково помеченные инициальные вершины ТИ D_g всех $g \in V$; 2) детерминизируем остовные деревья всех графов D_g, то есть многократно и исчерпывающе применим следующую операцию: если в множество преемников некоторой вершины попадают вершины с одинаковыми метками, то такие вершины отождествляются с заменой возникающих кратных дуг одной дугой.

Первый этап диагностического эксперимента состоит в построении ДТГ P. На втором этапе получение экспериментальных данных заключается в том, что МА, стартуя из неизвестной ему вершины h графа G, проверяет наличие/отсутствие в G путей, совпадающих по разметке с путями обхода в ширину графа P из его инициальной вершины. В зависимости от исхода каждой из этих проверок сокращается множество гипотетически возможных начальных вершин. По окончании работы алгоритма остается ровно одна такая вершина.

Показано, что для СД-графов временная сложность данного алгоритма проведения диагностического эксперимента полиномиальна от числа вершин исследуемого графа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
2. *Капитонова Ю. В., Летичевский А. А.* Математическая теория проектирования вычислительных систем. М.: Наука, 1988.
3. *Dudek G. and Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
4. *Сапунов С. В.* Определение положения робота в топологической среде // Искусственный интеллект. 2008. Т. 4. С. 558–565.
5. *Грунский И. С., Сапунов С. В.* Идентификация вершин помеченных графов // Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Т. 21. С. 86–97.

УДК 512.2

О КОНГРУЭНЦИЯХ ЦЕПЕЙ

Е. О. Карманова

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин; α — отношение на V, задающее множество дуг. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Существуют различные методы преобразования графовых систем для приложений к проблемам оптимизации в различных ситуациях. В качестве допустимых реконструкций данного графа обычно рассматриваются следующие [2]:

1) отождествление некоторых вершин графа;
2) ориентация ребер данного неориентированного графа;
3) переориентация некоторых дуг;
4) добавление новых дуг (ребер);
5) удаление некоторых дуг (ребер).

Будем рассматривать реконструкцию типа 1.

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Фактор-графом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε; $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : \exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2)\ ((u_1, u_2) \in \alpha)\}$. Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что фактор-граф G/θ является K-графом. Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов.

Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны. Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Цепь (простой путь, не являющийся циклом) с m ребрами будем обозначать P_m, звезду с m ребрами — S_m. В [3] представлена программа, генерирующая все конгруэнции заданной цепи и выделяющая среди них цепные конгруэнции, т. е. такие, фактор-графы по которым являются цепями. При этом выдается общее число конгруэнций данной цепи и количество её цепных конгруэнций. Например, у трехреберной цепи P_3 имеются четыре различных конгруэнции, которые дают три неизоморфных фактор-графа. У четырехреберной цепи P_4 всего имеется 14 фактор-графов, из них 7 попарно неизоморфных.

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он фактор-графом другого заданного графа? Эта задача является NP-полной. Например, возьмем пятиреберную цепь P_5. Пятивершинный цикл C_5 будет её фактор-графом, а четырехреберная звезда S_4 — нет.

Маршрут в связном графе называется обходом, если он содержит все ребра графа.

Теорема 1. Связный граф G тогда и только тогда является фактор-графом m-реберной цепи, когда в нем есть обход длины m.

Следствие 1. Любой связный граф с m ребрами является фактор-графом цепи P_{2m-1}.

Одной из открытых проблем является следующая: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является данный граф.

Теорема 2. Если T — дерево с m ребрами, имеющее диаметр d, то $p(T) = 2m - d$.

Следствие 2. Для звезды S_m имеем $p(S_m) = 2m - 2$.

Теорема 3. Для связного графа G с m ребрами $m \leqslant p(G) \leqslant 2m - 2$.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 367 с.
2. *Салий В. Н.* Оптимальные реконструкции графов // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 59–65.
3. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей и циклов // Компьютерные науки и информационные технологии. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. С. 238.
4. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2. С. 96–100.

УДК 519.17

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ[1]

А. А. Кочкаров, Л. И. Сенникова, Н. Н. Болуров

Фрактальные графы [1, 2] используются для моделирования структур, растущих по одним и тем же правилам независимо от точки роста. Не исключается множественный одновременный рост во всей структуре системы. Формальным отражением этих правил является операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ) [1, 2], она же лежит в основе определения фрактальных графов.

Термином «*затравка*» условимся называть какой-либо связный граф $H = (W, Q)$. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v} \in V$ выделяется множество $\widetilde{V} = \{\tilde{v}_j : j = 1, 2, ..., |\widetilde{V}|\}$ смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j \in \widetilde{V}$ соединяется ребром с одной из вершин затравки $H = (W, Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L — множество вершин графа, а E_L — множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1, 2, ..., L - 1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожден затравкой* $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L$, называемой *траекторией*. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией. Ранг L определяет «возраст» (число этапов порождения) и размер (число вершин) предфрактального графа.

Использование операции ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа G_L для элементов $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1, 2, ..., L - 1\}$, его траектории позволяет ввести отображение φ, такое, что $\varphi(V_l) = V_{l+1}$, $\varphi^t(V_l) = V_{l+t}$, $\quad t = 1, 2, ..., L - l$.

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathscr{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t, \ldots, H_T\}$, $T \geqslant 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t \in \mathscr{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1, G_2, \ldots, G_L$ из траектории предфрактального графа G_L разбивает множество ребер E_L на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L) = \left\{z_s^{(l)} : l = \overline{1, L}, s = \overline{1, n^{l-1}}\right\}$, где $n = |W|$. Такое разбиение на подмножества позволяет сохранить информацию о смежности старых ребер на момент их появления в предфрактальном графе. В траектории переход от графа G_{l-1} к G_l осуществляется $|V_{l-1}| = n^{l-1}$ операциями ЗВЗ, поэтому общее число использованных затравок в порождении предфрактального графа G_L равно

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 10-01-00786-а.

$1+n+n^2+...+n^{L-1} = \dfrac{n^L-1}{n-1}$. Тогда мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L также равна $\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

Число точек сочленения графа $H=(W,Q)$ обозначим через $m(H)$.

Теорема 1. Для всякого предфрактального графа G_L, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа точек сочленения $m(H)n^{L-1} \leqslant m(G_L) \leqslant m(H)n^{L-1} + \dfrac{n^L-n}{n-1}$, если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.

Число мостов графа $H=(W,Q)$ обозначим через $k(H)$.

Теорема 2. Для всякого предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа мостов:

$$k(H) \leqslant k(G_L) \leqslant k(H)\frac{n^L-n}{n-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочкаров А. М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998.
2. *Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. № 6. С. 1157–1162.

УДК 519.17: 681.3

КОМПАКТНЫЕ ГРАФЫ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ИХ СИНТЕЗА

В. А. Мелентьев

Проблема анализа и синтеза структур вычислительных систем (ВС) традиционно решается методами теории графов. При этом между множествами модулей ВС и вершин V графа $G(V,E)$ и между множествами линий связи и ребер E графа устанавливают биективные соответствия; задержки при этом оценивают метрическими характеристиками соответствующих графов — их диаметром d или радиусом. В рамках решения проблемы синтеза структур ВС рассматривается синтез s-регулярного графа порядка $n=|V|$ с минимально возможным при значениях n и s диаметром d. Такие графы далее называем $n(s)$-компактными.

Решение задачи основано на предложенном в [1] описании графа проекциями. Проекция $P(v_j)$ графа $G(V,E)$ является многоуровневой конструкцией, на нулевом уровне которой расположена ракурсная вершина v_j из V. Порожденное ею подмножество вершин первого уровня V_{1j} содержит все вершины ее окружения $\mathcal{N}(v_j)$, а i-й уровень $(i \geqslant 1)$ представляет собой совокупность подмножеств вершин, каждое из которых порождено вершиной $(i-1)$-го уровня и является окружением этой вершины без вершин, предшествующих ей в проекции. Вершине v_{ij} k-уровневой проекции $P_k(v_0)$ соответствует упорядоченное множество вершин $W(v_{ij})=(v_0,v_{10},\ldots,v_{ij})$, представляющее собой простую цепь из ракурсной вершины v_0 нулевого уровня этой проекции в вершину v_{ij} i-го уровня $(i \leqslant k)$; длина этой цепи $L(v_0,v_{ij})=i$. В общем случае некоторые вершины проекции $P_k(v_0)$ могут быть m_{ij}-кратными $(1 \leqslant m_{ij})$. Значение кратности m_{ij} соответствует числу простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину v_{ij}. Номер i уровня в проекции $P(v_0)$ определяет удаленность вершин этого уровня от ракурсной вершины v_0, а уровень k, впервые доопределяющий множество вершин всех нижерасположенных уровней проекции графа $G(V,E)$ до V, соответствует эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 в проекции $P(v_0)$ и вершинной полноте этой проекции. При $k=e(v_0)$ проекция $P_k(v_0)$ графа $G(V,E)$ становится вершинно-полной, и каждая вершина графа $G(V,E)$ хотя бы однажды появляется на уровне $i \leqslant e(v_0)$ проекции $P_k(v_0)$. Если при этом $e(u)=e=\mathrm{const}$ для всех $u \in V$, то диаметр d графа G равен значению e (напомним, что $d(G)=\max\limits_{u\in V} e(u)$), и число уровней в каждой вершинно-полной проекции графа также будет равным этому значению и диаметру графа. Таким образом, задача построения $n(s)$-компактного графа порядка n и степени s трансформируется в задачу построения такой системы проекций графа, в которой каждая проекция является вершинно-полной, а число уровней — минимально достаточным для размещения всех n вершин.

Нетрудно увидеть, что максимально возможное число вершин n_{i+1}, которое способен вместить $(i+1)$-й уровень проекции s-регулярного графа, определяется рекурсивно: $n_{i+1}=n_i(s-1)$, причем первые два члена этой последовательности — $n_0=1$ и $n_1=s$. Тогда максимально возможное для k-уровневой проекции $P_k(v_0)$ число вершин с единичной кратностью составит $N_k(s)=1+s\sum\limits_{i=1}^{k}(s-1)^{i-1}$. Этот предел является верхним для порядка s-регулярного графа при заданном числе k уровней в его проекциях; ограничение снизу определяется $(k-1)$-м уровнем: $N_{k-1}(s)<n$. Справедливо и обратное: минимальное число уровней в проекции графа определяется, исходя из значений порядка графа и его степени. Таким образом, для $n(s)$-компактного графа его диаметр d (равный эксцентриситету любой ракурсной вершины) находится из неравенства

$$1+s\sum_{i=1}^{d-1}(s-1)^{i-1}<n\leqslant 1+s\sum_{i=1}^{d}(s-1)^{i-1}.$$

Приведём модифицированный в сравнении с [2] детерминированный алгоритм синтеза компактных графов.

1. Из условия компактности и заданных значений порядка и степени/диаметра получим значение диаметра/степени графа.

2. Введем разметку вершин графа, произвольно выберем ракурсную вершину $v_0 \in V$ и построим для нее базовую d-уровневую проекцию $P'_d(v_0)$ остовного подграфа искомого $n(s)$-компактного графа $G(V,E)$. Размещение n вершин на d уровнях этой проекции может быть произвольным, но таким, что $\bigcup\limits_{i=0}^{d} V_i=V$, или $\sum\limits_{i=0}^{d}|V_i|=|V|$. Вершины V_1 1-го уровня проекции $P'_d(v_0)$ составляют окружение $\mathcal{N}(v_0)$ ракурсной вершины v_0, $|V_1|=s$; на последующих $2<i\leqslant d$ уровнях $|V_i+1|\leqslant|V_i|\cdot(s-1)$.

3. Окружения $\mathcal{N}'(v_j)$ вершин из базовой проекции $P'_d(v_0)$ сведем в список $\mathcal{N}'(G)= (\mathcal{N}'(v_j): v_j\in V)$. Вершины $v_j\in V$, окружения которых пока не определены полностью, включим в множество $V'=\{v_j\in V : |\mathcal{N}'(v_j)|<s\}$. Окружения $\mathcal{N}'(v_j)$ этих вершин v_j дополним потенциальными подмножествами $\mathcal{N}_p(v_j)_x=V'\setminus W(v_0,v_j)$, нижний индекс x при которых равен числу недостающих в этом окружении вершин ($x= s-|\mathcal{N}'(v_j)|$): $\mathcal{N}(v_j)=\mathcal{N}'(v_j)\cup\mathcal{N}_p(v_j)_x$. Здесь $W(v_0,v_j)$ — множество всех предшественниц вершины v_j в проекции $P'_d(v_0)$, составляющих простую цепь из v_0 в v_j. При необходимости обусловим синтез $n(s)$-компактного графа его обхватом g. В этом случае потенциальные подмножества вершин $\mathcal{N}_p(v_i)$, входящие в состав $\mathcal{N}(v_i)$, долж-

ны быть скорректированы: $\mathcal{N}_p(v_i) := \mathcal{N}_p(v_i) \setminus \{v_j \in \mathcal{N}_p(v_i) : i, j \in \{1, ..., d\}, i + j < g\}$. Здесь индексы при вершинах $v_i, v_j \in V$ соответствуют номерам уровней проекции $P'_d(v_0)$, на которых эти вершины располагаются.

4. Исходя из списка $\mathcal{N}(G)$ и заданного обхвата, поочередно выстраиваем остальные проекции $P_d(v_j)$, $v_j \in V$, уточняя при этом потенциальные подмножества $\mathcal{N}_p(v_j)$ и внося изменения в список $\mathcal{N}'(G)$ графа и в выстроенные ранее проекции.

5. Задача синтеза графа решена, когда список $\mathcal{N}'(G)$ определен полностью, т. е. для всех $v_j \in V$ имеет место $|\mathcal{N}(v_j)| = s$, $\mathcal{N}_p(v_j) = \varnothing$. Если это условие не выполнено, то в одном из потенциальных окружений следует выбрать вершину и перейти к п. 4. При этом мощность некоторых потенциальных подмножеств в списке $\mathcal{N}'(G)$ вершин может стать меньше их индекса, т. е. $|\mathcal{N}_p(v_j)_x| < x$. Тогда следует вернуться к предшествующей подстановке с запретом таковой и выбрать альтернативный в данном потенциальном подмножестве вариант.

В работе приведены примеры 13(4)-компактных графов с обхватами $g = 3$ и $g = 4$, а также 16(3)- и 16(5)-компактных графов с обхватами $g = 5$ и $g = 4$ соответственно, сгенерированных в соответствии с описанным выше алгоритмом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелентьев В. А.* Формальные основы скобочных образов в теории графов // Труды Второй Междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления» PACO'2004. М.: Ин-т проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, 2004. С. 694–706.
2. *Мелентьев В. А.* Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2(8). С. 74–86.

УДК 519.17

ОГРАНИЧЕНИЯ НА ОБХВАТЫ В КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

В. А. Мелентьев

Условие компактности [1] регулярного графа коррелирует его порядок n со степенью s и минимально возможным диаметром d:

$$1 + s\sum_{i=1}^{d-1}(s-1)^{i-1} < n \leqslant 1 + s\sum_{i=1}^{d}(s-1)^{i-1}.$$

Заметим, что область определения порядка компактных графов с заданными значениями степени и диаметра является в данном выражении максимальной и предполагает наличие в них всего спектра k циклов от $k = 3$ до максимально возможного значения $k = 2d + 1$, при этом значения обхвата g, равные длине минимального цикла в графе, определены соответствующей областью $3 < g \leqslant 2d + 1$.

Перепишем (для случая $s > 2$) условие в виде

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leqslant \frac{s(s-1)^{d} - 2}{s-2}.$$

Пусть регулярный граф $G(V, E)$ порядка n и степени s $n(s)$-компактен: его диаметр $d > 1$ и значения n и s соответствуют данному выше условию компактности (случай с $d = 1$ для s-регулярного графа соответствует полному графу, обхват которого $g(G) = 3$). Кратность вершин в рассматриваемых проекциях простых графов проявляется только на уровнях выше первого — в противном случае это были бы мультиграфы, находящиеся вне нашего рассмотрения. Основанная на проективном описании возможность синтеза регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата впервые представлена в [2]. Там же показано, что наличие в проекции графа одной или нескольких кратных вершин означает наличие в графе цикла длины k, равной сумме номеров уровней, на которых расположены эта или эти вершины; например, если вершина $u \in V$ входит в состав проекции дважды, т. е. ее кратность m_u равна 2, и входит она в состав подмножества вершин одного уровня или двух подмножеств разных уровней $u \in V_i$, $u \in V_j$ проекции, то этой проекцией определен цикл длины $k = i + j$, $i, j \in (1, 2, \ldots, d)$.

Отметим, что случай $n = N_d(s) = \left(s(s-1)^d - 2\right)/(s-2)$ соответствует $n(s)$-компактному графу с максимально возможным обхватом $g(G) = 2d + 1$ (если такой граф существует) и отсутствию в любой из его проекций вплоть до d-уровня кратных вершин. Кратными в проекции $P_d(v)$ называем перечисленные в ней повторяющиеся вершины. Попытка синтезировать граф с меньшим, чем $2d + 1$, обхватом приведет к появлению кратных вершин на уровнях $i < d$, по крайней мере, в тех его проекциях, ракурсные вершины которых входят в циклы соответствующей длины. При этом d-уровневые проекции с кратными вершинами теряют вершинную полноту, что увеличивает эксцентриситеты этих ракурсных вершин, а следовательно, и диаметр графа, т. е. граф теряет свойство компактности. Таким образом, $n(s)$-компактных графов с $n = N_d(s)$ и обхватом $g(G) < 2d + 1$ не существует, иначе говоря, при генерации $n(s)$-компактного графа с $n = N_d(s)$ все k-циклы длины $k < 2d + 1$ должны быть запрещены, т. е. из всех потенциальных подмножеств [2] вершин любого i-го ($i \leqslant d$) уровня каждой d-уровневой проекции синтезируемого графа должны быть изъяты вершины, уже вошедшие в состав j-х уровней, $j \leqslant i$.

Приведенное выше условие компактности графов является обобщенным и допускает наличие в них k-циклов любой длины, $3 \leqslant k \leqslant 2d+1$. В [1, 2] показаны возможности генерации лимитируемых обхватом $n(s)$-компактных графов. В данной работе получены аналитические условия существования таких графов.

Рассмотрим, каким образом изменятся граничные значения числа вершин $n(s)$-компактного графа при наличии в нем хотя бы одного 3-цикла, что соответствует графу с обхватом $g = 3$. Наличие всего одного 3-цикла в регулярном графе вызовет неизбежное появление на втором уровне каждой из трёх его проекций, ракурсные вершины которых образуют этот 3-цикл, двух вершин, кратных двум вершинам первого уровня. Таким образом, максимально возможное число некратных вершин второго уровня уменьшается на две; каждая кратная вершина i-го уровня ($1 < i \leqslant d$) вызывает масштабируемое множителем $s-1$ уменьшение числа некратных вершин на $(i+1)$-м уровне. Доказано, что порожденные кратными вершинами вершины также являются кратными. В соответствии с этим число $m_d(3)$ кратных вершин на всех d уровнях компактного графа, обусловленное наличием в нем всего одного 3-цикла, составит

$$m_d(3) = 2 + 2\,(s-1) + \ldots + 2(s-1)^{d-1} = 2\sum_{i=1}^{d-1}(s-1)^{i-1} = \frac{2\left((s-1)^{d-1} - 1\right)}{s-2}.$$

Тогда для того, чтобы граф порядка n оставался компактным, несмотря на наличие в нем одного 3-цикла, должно быть выполнено условие $n + m_d\,(3) \leqslant N_d\,(s)$, т. е. $n \leqslant N_d\,(s) - m_d\,(3)$, или

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leqslant (s-1)^{d-1}\,(s+1)\,.$$

Если же
$$(s-1)^{d-1}(s+1) < n \leqslant \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2},$$
то граф теряет свойство компактности при наличии в нем хотя бы одного треугольного цикла. Иными словами, при генерации $n(s)$-компактного графа, удовлетворяющего приведенному выше условию, из всех потенциальных подмножеств вершин второго уровня любой из проекций графа необходимо исключить все вершины первого уровня этой проекции.

Получены аналогичные формулы для любых k-циклов, $3 < k \leqslant 2d-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелентьев В. А.* Компактные структуры вычислительных систем и их синтез // Управление большими системами. 2011. №32. С. 241–261.
2. *Мелентьев В. А.* Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. №2(8). С. 74–86.

УДК 519

УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЭКСПОНЕНТОВ ПРИМИТИВНЫХ ГРАФОВ

В. М. Фомичев

Матрицу $A = (a_{i,j})$ порядка $n > 1$ над полем действительных чисел называют *неотрицательной* (*положительной*) и пишут $A \geqslant 0$ ($A > 0$), если $a_{i,j} \geqslant 0$ ($a_{i,j} > 0$) для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Неотрицательную матрицу A называют *примитивной*, если $A^t > 0$ при некотором натуральном t, а наименьшее натуральное γ, при котором $A^\gamma > 0$, называют *экспонентом*, или *показателем примитивности матрицы* A, и обозначают $\exp A$.

В ряде задач, в том числе криптографических, требуется определить экспоненты различных матриц. Для решения таких задач на языке теории графов часто используется эпиморфизм φ мультипликативного моноида неотрицательных матриц порядка n на моноид n-вершинных орграфов, где умножение орграфов определено как умножение бинарных отношений [1, с. 212]. При эпиморфизме φ матрице A соответствует орграф Γ с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$ и с множеством дуг U, где $(i, j) \in U$, если и только если $a_{i,j} > 0$, при этом матрица смежности вершин графа Γ называется *носителем матрицы* A. Очевидно, $\varphi(M) = \Gamma$. Для ограничения эпиморфизма φ на подмоноид симметрических матриц (для них $a_{i,j} = a_{j,i}$ при всех допустимых i, j) областью значений является подмоноид n-вершинных графов. Для эпиморфизма φ выполнено условие: $A > 0$, если и только если орграф $\Gamma = \varphi(A)$ полный. Отсюда неотрицательная матрица A и орграф $\Gamma = \varphi(A)$ одновременно примитивны или не примитивны, в случае примитивности экспоненты их равны. Далее используем преимущественно аппарат теории графов. Неориентированные графы будем называть просто графами.

Необходимым условием примитивности орграфа является его сильная связность. Критерий примитивности орграфа [2, с. 226]: если $C_1, \ldots, C_k$ суть все простые контуры орграфа Γ длин соответственно $l_1, \ldots, l_k$, то орграф Γ примитивный, если и только если НОД$(l_1, \ldots, l_k) = 1$. Отсюда $\exp \Gamma = \exp \Gamma'$, если примитивные орграфы (графы) Γ и Γ' изоморфны.

Достижимая абсолютная оценка экспонента любого примитивного n-вершинного орграфа Γ получена Виландтом [3]: $\exp \Gamma \leqslant n^2 - 2n + 2$, где $n > 1$. Эта оценка для n-

вершинного примитивного орграфа Γ допускает уточнение [2, с. 227] с использованием длины l кратчайшего простого контура в Γ: $\exp\Gamma \leqslant (n-2)l+n$. В частности, если орграф Γ имеет петлю, то он примитивен и $\exp\Gamma \leqslant 2n-2$.

Необходимым условием примитивности графа является его связность. Любое ребро графа есть цикл длины 2, тогда примитивность связного графа равносильна наличию в нем простого цикла нечетной длины. Отсюда по теореме Кенига о двудольных графах связный граф примитивен, если и только если он не является двудольным. Известна [2, с. 409] достижимая абсолютная оценка экспонентов примитивных n-вершинных графов: $\exp\Gamma \leqslant 2n-2$.

Далее через C обозначим контур в орграфе и через C^* — мультимножество вершин контура C, в случае простого контура — множество вершин. Множество W путей из i в j (при $i=j$ контуров), где $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, назовем (t,l)-множеством путей, t,l — натуральные, если в W имеется l путей (контуров), длины которых равны t, $t+1$, …, $t+l-1$.

Для уточнения оценки экспонента примитивного n-вершинного орграфа Γ использованы следующие свойства ($n>1$):

1) Γ примитивен, если содержит два простых контура со взаимно простыми длинами, в частности контур простой длины p и контур длины, не кратной p;
2) если в Γ (связном графе Γ') имеются пути из i в j длины $l>0$ для любых $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, то Γ (граф Γ') примитивен и $\exp\Gamma \leqslant l$;
3) если для некоторых $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ в Γ (в графе Γ') нет путей из i в j длины τ, то $\exp\Gamma > \tau$;
4) пусть в Γ имеется контур C длины l и (t,l)-множество путей из i в j, проходящих через вершину контура C, тогда в Γ имеются пути из i в j длины τ при любом $\tau \geqslant t$, где $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Пусть в орграфе Γ имеются простые контуры C и C' длины соответственно l и λ, где $1<\lambda<l\leqslant n$.

Теорема 1. Пусть $(l,\lambda)=1$, $n>2$, тогда:

1) если $C^*\cap C'^* = \varnothing$, то $\exp\Gamma \leqslant l\lambda - 2l - 3\lambda + 3n$;
2) если $C^*\cap C'^* = H$, где $|H| = h > 0$, то $\exp\Gamma \leqslant l\lambda - l - 3\lambda + h + 2n$.

Следствие 1. Для любого примитивного n-вершинного орграфа Γ при $n>2$ верно:

1) если циклы C и C' не имеют общих вершин, то
$$\exp\Gamma \leqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \leqslant n^2/4 + n/2 + 1/4;$$
2) если циклы C и C' имеют h общих вершин, где $1\leqslant h\leqslant\lambda$, то
$$\exp\Gamma \leqslant \left\lfloor \frac{n+h+2}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+h+2}{2} \right\rceil - 2h - n \leqslant n^2 - 2n + 2.$$

При $n>2$ *n-вершинным графом Виландта* назовем орграф, состоящий из гамильтонова контура C, к которому добавлена дуга (i,j), где расстояние на контуре от i до j равно 2, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Множество n-вершинных графов Виландта обозначим $\Gamma_{\mathrm{W}}(n)$.

Теорема 2. Множество $\Gamma_{\mathrm{W}}(n)$ состоит из $n!$ изоморфных графов; абсолютная оценка Виландта достигается на графах Виландта, и только на них. Для остальных примитивных орграфов Γ верна оценка, достижимая при $l=n$, $\lambda=n-2$, где $n>3$ и нечетное: $\exp\Gamma \leqslant n^2-3n+4$.

Замечание 1. Имеются натуральные числа, меньшие $n^2 - 2n + 2$, не являющиеся значениями экспонента какого-либо n-вершинного орграфа. Эти числа образуют «лакуны» (пропуски в натуральном ряду). Так, первыми были обнаружены (авторами A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn) «лакуны» вида $[n^2 - 3n + 5, (n-1)^2]$ и $[n^2 - 4n + 7, n^2 - 3n + 2]$. В дальнейшем эти результаты были обобщены.

В неориентированном графе Γ' обозначим через $\mathrm{len}[i,j]$ длину кратчайшего пути из i в j и через $e(C)$ — эксцентриситет цикла C, т. е. $e(C) = \max\limits_{i \notin C}\{\min\limits_{j \in C} \mathrm{len}[i,j]\}$.

Теорема 3.

а) Пусть $n > 1$, l — длина длиннейшего простого цикла C нечетной длины в примитивном n-вершинном графе Γ', $1 \leqslant l \leqslant n$, тогда

$$\exp \Gamma' \leqslant 2e(C) + l - 1 \leqslant 2n - l - 1.$$

б) Если простые циклы нечетных длин покрывают множество $\{1, \ldots, n\}$, то $\exp \Gamma' \leqslant n - 1$.

Обозначим через $\Gamma_P(n)$ множество примитивных n-вершинных графов, состоящих из гамильтонова пути и петли, инцидентной одной из концевых вершин.

Теорема 4. При любом $n > 1$ множество $\Gamma_P(n)$ состоит из $n!$ изоморфных графов; абсолютная оценка экспонента $2n - 2$ достигается на графах из $\Gamma_P(n)$, и только на них.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984.
2. *Сачков В. Н., Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000.
3. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Zeitschr. 1950. N. 52. S. 642–648.
4. *Фомичёв В. М.* Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. №2. С. 101–112.