Секция 4

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

ОБ ОДНОМ КОНТРПРИМЕРЕ ДЛЯ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

М. Б. Абросимов, Д. Д. Комаров

Связный граф без циклов называется *деревом.* Дерево называется *сверхстройным* (*звездообразным*), если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть *корнем* сверхстройного дерева. Вектор степеней сверхстройного дерева может быть записан в виде $(k, 2^m, 1^k)$.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным 1-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным 1-расширением графа G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любой его вершины;
2) граф G^* содержит $n + 1$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + 1$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть T — сверхстройное дерево вида $(m_1, \ldots, m_k)$ и $k > 2$. Дерево T тогда и только тогда имеет минимальное вершинное 1-расширение с $k + 1$ дополнительным ребром и вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$, когда выполняется условие

$$(\forall i = 1, \ldots, k : m_i > 1)\ (\forall j = 2, \ldots, m_i)\ (\exists\, 1 \leqslant l \leqslant k)\ (m_l = j - 1 \vee m_l = m_i - j).$$

Схема построения минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева по теореме 1 состоит в добавлении одной вершины, соединением её со всеми листьями и корнем. В работе [2] высказано более сильное утверждение по сравнению с теоремой 1. Прежде чем его сформулировать, дадим одно определение. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется *сложной*, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j - 1$ или $m_i - j$. В теореме 1 рассматриваются сверхстройные деревья без сложных вершин. Например, сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину.

Утверждение 1 [2]. Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с k цепями и p сложными вершинами содержит в точности $k+p+1$ дополнительных ребер.

При $p = 0$ приведенное утверждение совпадает с теоремой 1. Однако при $p > 0$ схема доказательства в работе [2] исследует вариацию вершинного 1-расширения с вектором степеней $((k + 1)^2, 2^{m+k})$ из теоремы 1. Пусть v_{ij} — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из вершины старшей степени в вершину $v_{i(j-1)}$. Далее авторы статьи утверждают, что построенный граф является минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева. Однако в общем случае построенный граф является вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным.

Из 67 сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 есть деревья, которые не попадают под действие теоремы 1, но имеют $k+1$ дополнительное ребро [3]. Оказывается, что все они являются контрпримерами к утверждению 1.

Сверхстройное дерево (5, 1, 1) имеет одну сложную вершину, но имеет единственное минимальное вершинное 1-расширение вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Сверхстройное дерево (3, 2, 2) также имеет одну сложную вершину, но имеет два минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ и одно вида $((k+1), k, 3, 2^{m+k-1})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Наконец, сверхстройное дерево (4, 3, 2) имеет одну сложную вершину, но имеет 4 минимальных вершинных 1-расширения вида $(k^2, 3^2, 2^{m+k-2})$ с четырьмя дополнительными рёбрами.

Ещё один интересный пример представляет собой сверхстройное дерево (5, 2, 2). Можно заметить, что оно имеет две сложные вершины, но его 37 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 6 дополнительных ребер. Аналогичная ситуация с деревьями (6, 1, 1) и (3, 3, 2), у которых также по две сложные вершины, но минимальные вершинные 1-расширения имеют 5 дополнительных рёбер.

Самое большое отклонение среди всех сверхстройных деревьев с числом вершин до 10 наблюдается на сверхстройном дереве (7, 1, 1). Непосредственной проверкой можно убедиться, что оно имеет три сложные вершины, но его 8 минимальных вершинных 1-расширений имеют 5, а не 7 дополнительных рёбер. Можно предположить, что на сверхстройных деревьях вида $(t, 1, 1)$ (количество сложных вершин в таких деревьях составляет $t-3$ при $t>3$) при увеличении t отклонение будет возрастать.

Каждый из этих контрпримеров показывает ошибочность утверждения 1 в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск, 2000. С. 59–64.
2. *Harary F and Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. V. 56. P. 135–143.
3. *Абросимов М. Б., Комаров Д. Д.* Минимальные вершинные расширения сверхстройных деревьев с малым числом вершин / Саратов, СГУ, 2010. 38 с. Деп. в ВИНИТИ 18.10.2010, № 590-В2010.

УДК 519.17

О КОЛИЧЕСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕРШИННЫХ И РЁБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЙ ЦИКЛОВ С ЧИСЛОМ ВЕРШИН ДО 17

М. Б. Абросимов, Н. А. Кузнецов

Дж. П. Хейз в работе [1], а затем вместе с Ф. Харари в работах [2, 3] предложил графовую модель для исследования отказоустойчивости дискретных систем. Особое внимание было уделено системам, представимым циклами. В работах [1 – 3] предложены схемы построения одной оптимальной отказоустойчивой реализации (минимального расширения) цикла; другие схемы предложены в [4–7].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* (k натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;
2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* (k натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением G, то есть граф G вкладывается в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Если говорить о минимальных вершинных и рёберных k-расширениях циклов, то можно встретить эквивалентные определения.

Граф называется *k-вершинно-гамильтоновым*, если после удаления любых его k вершин и инцидентных им рёбер получившийся граф является гамильтоновым. Граф называется *k-рёберно-гамильтоновым*, если после удаления любых k рёбер получившийся граф является гамильтоновым. Вершинно-(рёберно-)k-гамильтонов граф называется *оптимальным*, если он имеет минимально возможное число рёбер среди всех вершинно-(рёберно-)k-гамильтоновых графов с тем же числом вершин.

Известно, что задачи проверки вершинных (рёберных) k-расширений произвольных графов, так же как и задачи проверки k-вершинно-(рёберно-)гамильтоновых графов являются NP-полными [8]. Интерес представляет количество неизоморфных расширений для различных графов. В 2000 г. проведён вычислительный эксперимент [6–9], в рамках которого удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 13. В рамках представляемой работы проведён новый вычислительный эксперимент с использованием распределённых вычислений. Удалось построить все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения циклов с числом вершин до 17. Основные результаты представлены в таблице.

Минимальные вершинные (МВ-1Р) и рёберные (МР-1Р) 1-расширения циклов

Число вершин	Число МВ-1Р	Число МР-1Р
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	2	2
7	2	2
8	10	4
9	7	13
10	63	13
11	27	87
12	602	53
13	158	885
14	7203	320
15	1396	10933
16	104212	2641
17	16069	160145

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.
4. *Mukhopadhyaya K. and Sinha B. P.* Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. 1992. V. 44. P. 95–99.
5. *Hsu L. H. and Lin C. K.* Graph Theory and Interconnection Networks. CRC Press, 2009.
6. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2000. Вып. 3. С. 3–10.
7. *Абросимов М. Б.* О неизоморфных минимальных реберных 1-расширениях графов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. Саратов: СГУ, 2004. Вып. 6. С. 3–9.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.
9. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения циклов с числом вершин не более одиннадцати / Саратов: СГУ, 2001. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 14.08.2001, № 1869-В2001.

УДК 519.17

ОБ ОРГРАФАХ, ИМЕЮЩИХ МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Понятие минимального вершинного k-расширения введено на основе понятия оптимальной k-отказоустойчивой реализации, которое предложено Дж. П. Хейзом [1]. В работе [2] исследована задача описания неориентированных графов с заданным числом дополнительных рёбер минимальных вершинных 1-расширений. В данной работе рассматривается аналогичная задача для орграфов без петель. В [3] приводится лемма, устанавливающая связь между минимальными вершинными k-расширениями неориентированного графа и его ориентации.

Лемма 1 [3]. Пусть G^* есть минимальное вершинное k-расширение орграфа G. Тогда симметризация G^* является вершинным k-расширением симметризации G.

Следствие 1. Число дополнительных дуг минимального вершинного k-расширения орграфа G не менее числа дополнительных рёбер минимального вершинного k-расширения симметризации орграфа G.

В работе [2] получены следующие результаты (теоремы 1–3).

Теорема 1. Графы со степенным множеством $\{1, 0\}$, и только они, имеют минимальные вершинные 1-расширения с одним дополнительным ребром; для каждого графа со степенным множеством $\{1, 0\}$ такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теоремы 1 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой.

Теорема 2. Среди связных графов только цепи имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными рёбрами; для каждой цепи такое расширение единственно с точностью до изоморфизма.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теорем 1–2 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными дугами. Оказывается, что ориентация цепи имеет две дополнительные дуги в минимальном вершинном 1-расширении, только если цепь является гамильтоновой. Минимальным вершинным 1-расширением такой цепи является контур.

Теорема 3. Среди несвязных графов без изолированных вершин только графы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 1$ имеют минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными рёбрами, причём это расширение с точностью до изоморфизма совпадает с $C_{n+1} \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$.

С учётом следствия 1 получаем, что только ориентации графов из теорем 1–3 могут иметь минимальные вершинные 1-расширения с двумя дополнительными дугами.

Удалось получить следующие результаты.

Теорема 4. Орграфы, полученные объединением n двухвершинных цепей с m изолированными вершинами, где $m > 0$, и только они имеют минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой. Каждый такой орграф имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.

Теорема 5. Среди связных орграфов гамильтоновы цепи P_n, и только они, имеют две дополнительные дуги в минимальном вершинном 1-расширении. При $n > 2$ каждая цепь имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение. При $n = 2$ цепь имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: циклическую и транзитивную тройки.

Теорема 6. Среди несвязных орграфов без изолированных вершин только орграфы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \ldots \cup C_{n+1}$ при $n > 2$, где циклы являются контурами, а цепь — гамильтоновой цепью, имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами. При $n = 2$ возможен ещё один случай: вместо контура C_3 можно взять транзитивную тройку T_3. Граф $P_2 \cup T_3 \cup \ldots \cup T_3$ также имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами.

На рис. 1 представлена схема построения семейства графов из теоремы 6 и их минимальных вершинных 1-расширений.

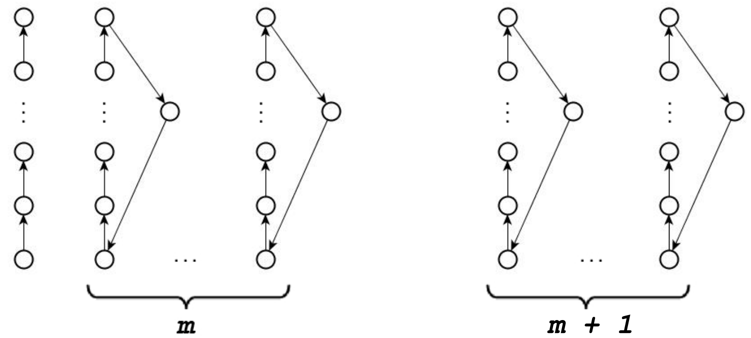

Рис. 1. Орграф и его минимальное вершинное 1-расширение с двумя дополнительными дугами

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.
3. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. № 23:2. С. 93–102.

УДК 519.17

О МИНИМАЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЧЕРНО-БЕЛЫХ ЦЕПЕЙ ОСОБОГО ВИДА

П. П. Бондаренко

Определение 1. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* [1, 2] n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + kp$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + kp$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Определение 2. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* [3] n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$ с вершинами p типов, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;

2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Вершины разных типов можно изображать различными цветами. Будем рассматривать минимальные вершинные и рёберные 1-расширения черно-белых неориентированных графов, в которых вершины имеют два типа: $p = 2$ (белые и чёрные вершины).

В результате вычислительного эксперимента построены все минимальные вершинные и рёберные 1-расширения черно-белых цепей, в которых две белые вершины имеют степень 1, а чёрные — степень 2 (то есть белые вершины на концах цепи), с количеством вершин до 9.

Теорема 1. Минимальные вершинные расширения цепей P_n с вершинами двух типов, в которых белые вершины имеют степень 1, а чёрные — степень 2, содержат $m = 3k$ рёбер при чётном $n = 2k$, и одно из минимальных 1-вершинных расширений имеет вид, показанный на рис. 1,*а*. При нечётном $n = 2k + 1$ количество рёбер $m = 3k + 2$, и одно из минимальных вершинных расширений имеет вид, показанный на рис. 1,*б*.

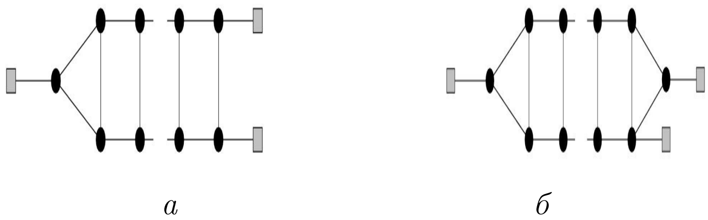

Рис. 1. Минимальное вершинное расширение P_n

Теорема 2. Минимальные рёберные расширения цепей P_n с вершинами двух типов, в которых белые вершины имеют степень 1, а чёрные — степень 2, содержат $m = 3k - 1$ рёбер при чётном $n = 2k$, и одно из минимальных рёберных расширений имеет вид, показанный на рис. 2,*а* (для чётного k) и рис. 2,*б* (для нечётного k). При нечётном $n = 2k + 1$ количество рёбер $m = 3k + 1$, и одно из минимальных рёберных расширений имеет вид, показанный на рис. 2,*в*.

При этом минимальные рёберные расширения, показанные на рис. 2,*а* и *б*, в то же время являются минимальными вершинными расширениями циклов с вершинами двух типов — одной белой вершиной и остальными чёрными — с количеством вершин на 2 меньшим, чем в расширениях.

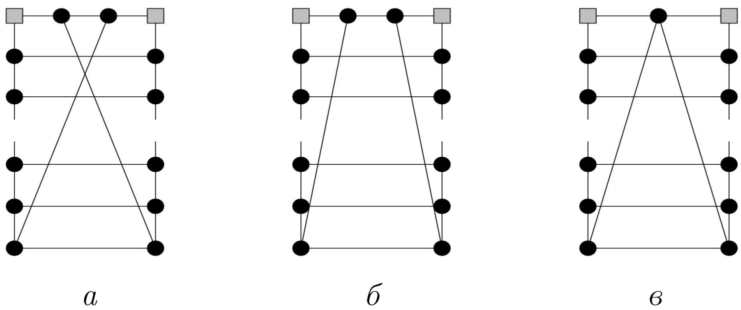

Рис. 2. Минимальное рёберное расширение P_n

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абросимов М. Б.* Минимальные k-расширения предполных графов // Изв. вузов. Математика. 2003. №6(493). С. 3–11.
2. *Heyes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. 25. No. 9. P. 875–884.
3. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.

УДК 519.7

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ РАЗМЕТКА ВЕРШИН ГРАФА БЛУЖДАЮЩИМ ПО НЕМУ АГЕНТОМ

И. С. Грунский, С. В. Сапунов

Рассматривается задача разметки вершин конечного простого связного неорграфа посредством блуждающего по нему агента. Разметка производится за один проход так, что в окрестности каждой вершины все вершины размечены разными метками.

Размеченные таким способом графы (*помеченные графы*) могут быть использованы в качестве топологических моделей операционной среды мобильных роботов [1].

Помеченным графом будем называть конечный простой связный неорграф с помеченными вершинами $G = (V, E, M, \mu)$, где V — множество вершин; E — множество ребер; M — множество меток вершин; $\mu : V \to M$ — сюръективная функция разметки. Путем длины k в графе G будем называть последовательность его вершин $p = g_1, \ldots, g_k$, такую, что $(g_i, g_{i+1}) \in E$, $i = 1, \ldots, k-1$. Меткой $\mu(p)$ пути p, определяемой вершиной g_1, назовём слово $w = \mu(g_1) \ldots \mu(g_k)$. Обозначим через L_g множество всех слов $w \in M^+$, определяемых вершиной g. Введём операцию $\star : V \times M^+ \to 2^V$: для любой $g \in V$ и любого $w \in M^+$ через $g{\star}w$ обозначим множество всех вершин $h \in V$, таких, что существует путь p из g в h и $\mu(p) = w$. Множество всех вершин, находящихся от g на расстоянии не больше k, назовём k-окрестностью $\Gamma_g^{(k)}$ вершины $g \in V$.

Мобильный агент A, находясь в вершине $g \in V$, наблюдает метки всех вершин из $\Gamma_g^{(k)}$, $k \geqslant 2$. Положим, что наименьшим наблюдением, необходимым для мобильности агента, является наблюдение $\Gamma_g^{(2)}$. Основываясь на анализе «увиденного», агент принимает решение о перемещении между смежными вершинами. Агент может заменить метку вершины другой меткой из M. Агент также может устанавливать в текущей вершине переносной маркер (*камень*) или подбирать его. Через $A2$ обозначим агента, наблюдающего только $\Gamma_g^{(2)}$; через $A3$ — агента, наблюдающего только $\Gamma_g^{(3)}$.

Функцию разметки μ назовём детерминированной (или Д-разметкой), если для любой $g \in V$ и любых $s, t \in \Gamma_g^{(2)}$ из $s \neq t$ следует $\mu(s) \neq \mu(t)$. Граф с Д-разметкой будем называть детерминированным, или Д-графом. Далее всюду используются Д-графы. В таких графах для любой вершины $g \in V$ и любого слова $w \in M^+$ выполняется $|g \star w| \leqslant 1$, где $|g \star w| = 1$, если $w \in L_g$, и $|g \star w| = 0$ иначе. Показано, что агент $A2$, «зная» слово $w \in L_g$, такое, что $g{\star}w = h$, может переместиться из g в h. Таким образом, Д-разметка графа является достаточным условием для организации на нём навигации мобильных агентов. Показано далее, что для любых $g, h \in V$, $g \neq h$, $\mu(g) = \mu(h)$, и любого $w \in L_g \cap L_h$ расстояние между $g \star w$ и $h \star w$ не меньше 4, т. е. для того, чтобы выполнить Д-разметку вершин, необходимо наблюдение их 3-окрестностей.

Задача построения Д-разметки формулируется следующим образом. Агент устанавливается в произвольную вершину априори неизвестного ему графа, все вершины которого помечены одной и той же меткой. Агент должен осуществить Д-разметку вершин этого графа, причём если вершина уже помечена агентом, то её метка в дальнейшем не изменяется.

Построение минимальной Д-разметки на основе только локальной информации о вершинах графа представляется в общем случае невозможным. Поэтому в работе рассматривается построение «жадных» алгоритмов разметки. Показано, что с помощью Д-разметки агент может восстановить исследуемый граф с точностью до изоморфизма и что минимальная Д-разметка восстановленного графа может быть получена применением к его транзитивному замыканию известных в теории графов алгоритмов правильной раскраски [2].

Предложен метод Д-разметки вершин агентом $A3$, основанный на обходе графа в ширину. При этом для неявного именования вершин используются метки путей в них из начальной вершины по дереву обхода. Разработан соответствующий полиномиальный алгоритм.

Увеличение размера наблюдаемой агентом окрестности (т. е. объёма его входной информации) приводит к увеличению сложности робота, который реализует функции агента, поэтому целесообразно рассмотреть модель с ограничениями на размер наблюдения.

Предложена модификация алгоритма разметки для системы $(A2, p_1, p_2)$, состоящей из агента $A2$ и камней двух видов: одного камня p_1 для обозначения текущей вершины и нескольких камней p_2 для обозначения непомеченных вершин из её 2-окрестности. Число камней p_2 не превышает максимальной степени вершин графа.

Теорема 1. При решении задачи построения Д-разметки вершин помеченного графа агент $A3$ и система $(A2, p_1, p_2)$ эквивалентны по вычислительной мощности.

Для графов типа n-цепь, n-веер, n-угольник [2] разработана модификация алгоритма разметки агентом $A2$ без использования камней и без запоминания неявных имён вершин. Показано, что разметка n-цепи и n-угольника может быть выполнена конечным автоматом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudek G. and Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
2. *Зыков А. А.* Основы теории графов. М.: Вузовская книга, 2004.

УДК 519.1

ОБ ИНДЕКСАХ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДВОИЧНЫХ ВЕКТОРОВ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОРИЕНТАЦИЯМИ ЦИКЛОВ

А. В. Жаркова

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ), где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*, $\delta : S \to S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется *карта* — ориентированный граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры называются предельными циклами или *аттракторами*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров без проведения динамики. К их числу относится индекс состояния — расстояние до аттрактора того бассейна, которому принадлежит состояние. Программа [1] позволяет вычислять различные параметры динамических систем двоичных векторов, ассоциированных с некоторыми типами графов.

В данной работе предлагается алгоритм для подсчёта индексов состояний в динамической системе двоичных векторов, порожденных такими графами, как циклы. Определяется также максимальный из индексов системы заданной размерности.

На множестве $B = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} B^n$, где через B^n, $n > 2$, обозначается множество всех двоичных векторов длины n, рассмотрим динамическую систему (B, θ). Пусть состоянием динамической системы в данный момент времени является вектор $v \in B$. Тогда в следующий момент времени она окажется в состоянии $\theta(v)$, полученном путем одновременного применения следующих правил: I) если первой компонентой в v является 0 и последней компонентой — 1, то первой компонентой в $\theta(v)$ будет 1, а последней — 0;

II) если в составе v имеются диграммы вида 10, то в $\theta(v)$ каждая из них заменяется на 01; III) других отличий между v и $\theta(v)$ нет.

Каждое состояние размерности n при динамике переходит в состояние той же размерности. Таким образом, система (B, θ) разбивается на конечные подсистемы (B^n, θ), $n > 2$.

Динамическая система (B^n, θ), $n > 2$, изоморфна динамической системе (C_n, θ), которая вводится следующим образом: её состояниями являются всевозможные ориентации цикла длины n, а эволюционная функция у данного ориентированного цикла переориентирует все дуги, входящие в стоки (вершины с нулевой степенью исхода), а все остальные дуги оставляет без изменения. Динамическая система, состояниями которой являются бесконтурные ориентированные графы, с определенной таким образом эволюционной функцией введена в [2].

Будем считать два вектора *циклически идентичными*, если один получается из другого циклическим сдвигом.

Теорема 1. Состояния динамической системы (B^n, θ), $n > 2$, являющиеся циклически идентичными, имеют одинаковые индексы.

Через $p_c(v)$ обозначим *циклическую плотность* вектора v, то есть количество пар совпадающих соседних компонент в нем с учётом циклического сдвига. Например, $p_c(11001011) = 1 + 3 = 4$. Очевидно, что для состояния v системы (B^n, θ), $n > 2$, имеет место $0 \leqslant p_c(v) \leqslant n$. Под *циклическим блоком* будем понимать максимальное по включению множество подряд стоящих нулей (0-блок) или единиц (1-блок) в количестве >1 с учетом циклического сдвига. Длина блока — число нулей (единиц) в блоке, уменьшенное на 1. Обозначим через p_c^0, p_c^1 суммы длин с учетом циклического сдвига рассматриваемых 0-блоков и 1-блоков соответственно.

Под *блок-группой* будем понимать последовательность компонент вектора, возможно при циклическом сдвиге, начинающуюся с 0-блока и заканчивающуюся 1-блоком. Под *первичной блок-группой* будем понимать блок-группу, в которой сначала идут только 0-блоки, затем только 1-блоки.

Алгоритм вычисления индекса состояния системы (B, θ)

Индекс $i(v)$ состояния v системы (B, θ) вычисляется исходя из его представления в виде вектора.

I. Если $p_c^0 = 0$ или $p_c^1 = 0$, то $i(v) = 0$.

II. Если $p_c^0 \neq 0$ и $p_c^1 \neq 0$, то выполняем следующие действия.

1. Помечаем в векторе все первичные блок-группы. Их количество обозначаем через h.
2. В каждой блок-группе подсчитываем суммы длин 0- и 1-блоков. Пусть $0 < j \leqslant h$, тогда считаем $p_{c(j)}^0$, $p_{c(j)}^1$ и помечаем блок-группы знаками «$-(x)$», «$=$» и «$+(x)$», если в них $p_{c(j)}^0 > p_{c(j)}^1$, $p_{c(j)}^0 = p_{c(j)}^1$, $p_{c(j)}^0 < p_{c(j)}^1$ соответственно, где $x = |p_{c(j)}^0 - p_{c(j)}^1|$.
3. Если в векторе существуют одновременно «$-$» и «$+$» блок-группы, то идём в п. 4, иначе идём в п. 5.
4. Если в векторе подряд стоят «$-(x)$» блок-группа и «$+(y)$» блок-группа (без учёта остальных компонент и «$=$»-групп между ними, если они имеются), то объединяем их в одну блок-группу, включая возможно стоящие между ними компоненты и «$=$»-группы (их количество в данном случае обозначим за $h_=$), и помечаем знаком «$-(x - y)$», «$=$» или «$+(y - x)$», если $x > y$, $x = y$, $x < y$ соответственно. Полагаем $h := h - 1 - h_=$ и идём в п. 3.

5. Считаем i_j, $0 < j \leqslant h$, согласно следующим правилам:
   - в «$-$» блок-группе $i_j = t_j/2 - 1$, где t_j — длина той части данной блок-группы (если её рассматривать с конца циклически влево), в которой выполняется равенство $p_c^0 = p_c^1$;
   - в «$=$» блок-группе $i_j = l_j/2 - 1$, где l_j — длина рассматриваемой блок-группы;
   - в «$+$» блок-группе $i_j = t_j/2 - 1$, где t_j — длина той части данной блок-группы (если её рассматривать с начала циклически вправо), в которой выполняется равенство $p_c^0 = p_c^1$.
6. $i(v) = \max\limits_{0<j\leqslant h} i_j$.

Теорема 2. Предложенный алгоритм вычисления индекса состояния динамической системы (B, θ) корректен.

Следствие 1. Система (B^n, θ), $n > 2$, имеет максимальный индекс, равный $(n-1)/2 - 1$ при нечетном n и $n/2 - 1$ при четном n.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власова А. В.* Исследование эволюционных параметров в динамических системах двоичных векторов // Свидет. РОСПАТЕНТа №2009614409, зарегистр. 20 августа 2009.
2. *Barbosa V. C.* An atlas of edge-reversal dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
3. *Жаркова А. В.* Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. 2012. №2(12). С. 79–85.

УДК 519.1

КОНГРУЭНЦИИ ЦЕПЕЙ: НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА

Е. О. Карманова

Под ориентированным графом (далее орграфом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество вершин, а α — отношение смежности на V.

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа G. Фактор-графом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1) \exists u_2 \in \varepsilon(v_2)) ((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что фактор-граф G/θ является K-графом.

Возьмём в качестве класса K класс неориентированных графов. Неориентированным графом (или, для краткости, графом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. Множество вершин называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны.

Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа G тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Теорема 1. Количество конгруэнций m-реберной цепи равно количеству эквивалентностей на m-элементном множестве.

В [1] обсуждалась следующая задача: для данного связного графа G найти цепь с минимальным возможным числом ребер $p(G)$, фактор-графом которой является граф G.

Теорема 2. Пусть G — связный граф. Тогда $p(G) = m + l - k$, где m — количество ребер графа G; l — количество ребер в минимальном цепном паросочетании на множестве нечётных вершин графа G; k — максимальная из длин цепей в таких паросочетаниях.

Подробное изложение представленных результатов можно найти в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2(12). С. 96–100.
2. *Карманова Е. О.* Конгруэнции цепей: некоторые комбинаторные свойства // Прикладная дискретная математика. 2012. № 2(12). С. 86–89.

УДК 519.17

О РЁБЕРНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ Δ-РАСКРАСКЕ[1]

А. М. Магомедов

Входные данные к расписанию обработки устройств — заданий множества X — в системе устройств-процессоров Y представлены двудольным графом $G = (X, Y, E)$, где ребро (x, y) присутствует в множестве E тогда и только тогда, когда процессору y запланирована операция над заданием x.

Расписание работы устройств будем называть *непрерывным*, если каждое устройство работает без простоев с момента его включения до выключения.

Пусть n — число вершин, Δ — наибольшая степень вершины графа G (Δ служит нижней границей для длин непрерывных расписаний). Известно, что задача о существовании непрерывного расписания NP-полна (как и задача о существовании непрерывного расписания длины Δ); в ряде источников она формулируется как задача об интервальной рёберной раскраске [1, 2].

Двудольные графы $G = (X, Y, E)$ с небольшими значениями Δ и n, не допускающие интервальной раскраски, были построены следующими авторами: С. В. Севастьяновым ($\Delta = 21$, $n = 28$), M. Malafiejcki ($\Delta = 15$, $n = 19$), A. Hertz ($\Delta = 14$, $n = 23$), D. de Werra ($\Delta = 14$, $n = 21$), P. Erdős ($\Delta = 13$, $n = 27$). Отметим, что ни один из этих графов не является бирегулярным.

Построен пример $(6, 3)$-бирегулярного графа с $n = 33$, не обладающего интервальной рёберной раскраской в 6 цветов (в [3] доказана NP-полнота задачи об интервальной раскрашиваемости $(6, 3)$-бирегулярного графа шестью цветами).

Теорема 1. Задача об интервальной рёберной раскраске Δ цветами остается NP-полной и для двудольных мультиграфов $G = (X, Y, E)$ с $|X| = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асратян А. С., Камалян Р. Р.* Интервальные раскраски рёбер мультиграфа // Прикладная математика. 1987. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. С. 25–34.
2. *Севастьянов С. В.* Об интервальной раскрашиваемости рёбер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61–72.

[1]Работа поддержана гос. заданием, проект № 01.1923.2011.

3. *Asratian A. S. and Casselgren C. J.* Some results on interval edge colorings of (α, β)-biregular bipartite graphs. Linköping, Sweden: Linköpingsuniversitet, 2006.

УДК 519.1

СХЕМА ВЫДЕЛЕНИЯ ПАРОСОЧЕТАНИЙ[1]

Т. А. Магомедов

В [1, с. 165] приведены следующие достаточные условия существования в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания множества X с множеством Y:

$$\min_{x \in X} d_G x \geqslant \max_{y \in Y} d_G y. \tag{1}$$

Необходимые и достаточные условия сформулированы в известной теореме Холла [1, с. 164].

Теорема 1. Для существования в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ полного паросочетания множества X с множеством Y достаточно выполнение условий

$$\forall (x, y) \in E \ \ (d_G x \geqslant d_G y)\,,$$

которые в дальнейшем будем называть «условиями доминирования».

Определение 1. Пусть граф $G = (X, Y, E)$ удовлетворяет условиям доминирования. Если после удаления из E некоторого паросочетания условия доминирования выполняются, то данное удаление назовём *сохраняющим*.

Определение 2. Разбиение множества рёбер E графа $G = (X, Y, E)$ на последовательность $A, B, C, \ldots$ из Δ паросочетаний называется *непрерывным*, если любое ребро, инцидентное вершине $x \in X$, включено в одно из первых $d_G x$ паросочетаний данной последовательности.

Теорема 2. Пусть граф $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$ удовлетворяет условиям доминирования; $G_i = (X_1, Y_i, E_i)$ — граф, полученный удалением из графа $G_{i-1} = (X_1, Y_{i-1}, E_{i-1})$ минимального паросочетания M_{i-1}, насыщающего все вершины наибольшей степени в G_{i-1}, $i = 2, \ldots, \Delta$. Тогда

1) каждое из этих удалений является сохраняющим;
2) $M_\Delta \equiv E_\Delta$ является полным паросочетанием множества X_1 с множеством Y_1 в G_1;
3) последовательность $M_\Delta, \ldots, M_1$ представляет непрерывное разбиение множества E_1 на Δ паросочетаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

УДК 519.17

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ОСТОВНОГО ДЕРЕВА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ

Л. И. Сенникова А., А. Кочкаров

В работе предлагается описание *параллельного алгоритма* $\mathscr{R}$ поиска остовного дерева минимального веса (ОДМВ) [1] на предфрактальном графе [2, 3].

[1]Работа поддержана гос. заданием, проект № 01.1923.2011.

В основе определения фрактальных графов лежит операция *замены вершины затравкой* (ЗВЗ). Термином «затравка» условимся называть какой-либо связный граф $H = (W, Q)$. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{\nu} \in V$ выделяется множество $\widetilde{V} \subseteq V$ смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{\nu}$ и все инцидентные ей рёбра. Затем каждая вершина $\tilde{\nu}_j \in \widetilde{V}$, $j = 1, 2, \ldots, \left|\widetilde{V}\right|$, соединяется ребром с одной из вершин затравки H. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определённому правилу при необходимости.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L — множество вершин графа, а E_L — множество его рёбер. Определим его рекуррентно, поэтапно заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1, 2, \ldots, L-1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой H. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* G_L *порожден затравкой* H. Процесс порождения предфрактального графа G_L по существу есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, \ldots, G_l, \ldots, G_L$, называемой *траекторией*. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой H, определяется бесконечной траекторией. Предфрактальный граф G_L условимся называть (n, q, L)-графом, если он порожден n-вершинной q-рёберной связной затравкой H.

Для предфрактального графа G_L рёбра, появившиеся на l-м, $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$, этапе порождения, будем называть *рёбрами ранга* l. *Новыми* рёбрами предфрактального графа G_L назовём рёбра ранга L, а все остальные рёбра назовём *старыми*.

При удалении из предфрактального графа G_L всех рёбер рангов $l = 1, 2, \ldots, L-r$ получим множество $\{B_{L,i}^{(r)} : i = 1, 2, \ldots, n^{L-r}\}$ *блоков* r*-го ранга*, где i — порядковый номер блока; $r \in \{1, 2, \ldots, L-1\}$. Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(l)}$ первого ранга предфрактального графа G_l из траектории. Мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L равна $(n^L - 1)/(n-1)$.

Будем говорить, что *предфрактальный граф* G_L *взвешен*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $\omega(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где l — ранг ребра; $a > 0$ и $\theta < a/b$.

Алгоритм $\mathscr{R}$ осуществляет поиск ОДМВ $T = (V_L, E_T)$ на взвешенном предфрактальном графе G_L. Алгоритм использует k процессоров $p_1, p_2, \ldots, p_k$ на многопроцессорной вычислительной машине с распределённой памятью. Назначим каждый процессор одной из подграф-затравок $z_s^{(l)}$, $l = 1, \ldots, L$, $s = 1, \ldots, n^{l-1}$, предфрактального графа G_L, тогда число используемых процессоров равно $k = (n^L - 1)/(n-1)$. Суть работы алгоритма заключается в следующем. Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}$ рассматривается как отдельно взятый граф. При этом каждый из k процессоров p_i, $i = 1, \ldots, k$, независимо от других находит ОДМВ T_i на своей подграф-затравке $z_s^{(l)}$. Поиск ОДМВ отдельно взятой подграф-затравки осуществляется алгоритмом Прима. Нахождение ОДМВ $T_1, T_2, \ldots, T_k$ всех подграф-затравок $z_s^{(l)}$ определяет ОДМВ T предфрактального графа G_L. Каждое ребро предфрактального графа имеет свой уникальный номер, однозначно определяющий ребро во всей траектории. Таким образом, выделение ОДМВ на подграф-затравке $z_s^{(l)}$ соответствует выделению множества рёбер на предфрактальном графе G_L.

Кроме принципиальной возможности эффективного распараллеливая задачи о поиске ОДМВ на предфрактальном графе важен еще и следующий факт.

Теорема 1. Вычислительная сложность алгоритма $\mathscr{R}$ для предфрактального (n, q, L)-графа (G_L) с числом вершин $|V_L| = N$ равна $O(Nn^2)$.

Вычислительная сложность алгоритма Прима равна $O(N^2)$. Сравнив её с вычислительной сложностью алгоритма $\mathscr{R}$, получаем, что при реализации алгоритма $\mathscr{R}$ на одном процессоре поиск ОДМВ на предфрактальном графе будет осуществлен быстрее, чем широко известным алгоритмом Прима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. *Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44. №6. С. 1157–1162.
3. *Кочкаров А. А., Сенникова Л. И.* Количественные оценки некоторых связностных характеристик предфрактальных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. №4(14). С. 56–61.

УДК 519.5

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАФА КОЛЛЕКТИВОМ АВТОМАТОВ

Е. А. Татаринов

Рассматривается задача [1] восстановления конечного связного неориентированного графа G без петель и кратных ребер при помощи агента, который перемещается по рёбрам графа G, считывает и изменяет метки на его вершинах и инциденторах. На основе собранной информации агент строит граф H, изоморфный графу G с точностью до меток на элементах графов. Требуется найти алгоритм обхода и разметки графа G для решения этой задачи.

Известен ряд алгоритмов, реализующих восстановление графа при помощи построения на его вершинах неявной нумерации [2] при помощи агента A, они подробно описаны в [3, 4]. Наиболее простым в реализации является Базовый Алгоритм [3], однако он имеет кубическую, от числа вершин в графе, верхнюю оценку временной сложности. Предлагается модификация Базового Алгоритма, понижающая эту оценку. При этом верхняя оценка временной сложности зависит от количества агентов, которые проводят восстановление графа.

В [4] показано, что верхняя оценка временной сложности зависит от длины максимального простого цикла t в графе, цикломатического числа q [5] и количества вершин n исследуемого графа и равна $O(n + qt)$. В процессе восстановления агент разбивает рёбра графа на два множества: древесные и обратные [5], а все пройденные вершины, у которых не все рёбра восстановлены, образуют красный путь [3].

Наибольшего времени требуют обратные ребра, для восстановления которых агент выполняет проход по вершинам красного пути, длина которого соизмерима с длиной наибольшего простого цикла. Для сокращения этого прохода используются агенты A_i, $i = 1, \ldots, j$. Они двигаются вдоль красного пути, сохраняя между собой равное расстояние. Для этого они обмениваются сообщениями A с A_j, A_i с A_{i-1} для $i = 2, \ldots, j$. Для каждого агента A_i, $i = 1, \ldots, j$, фиксируется длина красного пути от его начала (конца) до вершины, в которой находится этот агент.

При восстановлении обратного ребра агенту A требуется проходить не весь красный путь (в прямом или обратном направлении), а до первого агента A_i, для которого известна длина пути от него до начала (конца) красного пути. Это позволит вычислить длину красного пути до вершины, которой инцидентно восстанавливаемое обратное ребро, и её неявный номер. После этого агент вернётся обратно в конец красного пути по пройденной его части и восстановленному обратному ребру.

Таким образом, обратное ребро будет однозначно восстановлено. При этом агент выполнит проход по вершинам красного пути (в прямом и обратном направлении), длина которого не превышает наибольшего расстояния между агентами A_i и A_{i-1}, $i = 2, \ldots, j$. Поскольку это расстояние поддерживается агентами A_{i-1} одинаковым, то агент сделает не более чем $\mathrm{O}(t/j)$ шагов.

Очевидна справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. При восстановлении графа коллективом агентов A, A_i, $i = 1, \ldots, j$, которые выполняют Базовый Алгоритм и находятся на равном расстоянии друг от друга, верхняя оценка временной сложности модификации базового алгоритма равна $\mathrm{O}(n + qt/j)$.

Если агенты A_i не поддерживают между собой равного расстояния, а это расстояние вычисляется при помощи некоторой функции $f(t, i)$, то для восстановления обратных рёбер агент использует не более чем $\mathrm{O}(qf(t, i))$ шагов.

Утверждение 2. При восстановлении графа коллективом агентов A, A_i, $i = 1, \ldots, j$, которые выполняют Базовый Алгоритм и находятся на расстоянии $f(t, i)$ друг от друга, верхняя оценка временной сложности модификации базового алгоритма равна $\mathrm{O}(n + qf(t, i))$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dudek G. and Jenkin M.* Computational principles of mobile robotic. Cambridge Univ. Press, 2000. 280 p.
2. *Татаринов Е. А.* М-нумерация, как метод распознавания графов // Збірник наукових праць «Питання прикладної математики та математичного моделювання». 2010. С. 260–272.
3. *Грунский И. С., Татаринов Е. А.* Распознавание конечного графа блуждающим по нему агентом // Вестник Донецкого университета. Сер. А. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 492–497.
4. *Татаринов Е. А.* Базовый алгоритм восстановления графа // Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Т. 21. С. 216–227.
5. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.