Секция 4

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.17

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО ВЕРШИННОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЦЕПИ

М. Б. Абросимов, О. В. Моденова

Даётся нижняя оценка для числа дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения произвольной ориентации цепи.

Ключевые слова: *граф, минимальное вершинное расширение, отказоустойчивость.*

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является вершинным k-расширением графа G, то есть граф G вложим в каждый подграф графа G^*, получающийся удалением любых его k вершин;

2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Понятие минимального вершинного k-расширения появилось в работе Дж. Хейза [1] как модель для исследования отказоустойчивости дискретных систем. Там же доказывается, что минимальным вершинным 1-расширением n-вершинной цепи является $(n+1)$-вершинный цикл, а в работе [2] доказывается, что это минимальное вершинное 1-расширение является единственным с точностью до изоморфизма. Задача поиска минимального вершинного k-расширения для произвольного графа является вычислительно сложной [3], и в общем виде решение удалось получить лишь для некоторых классов графов.

Рассмотрим ориентации цепи. Очевидно, что ориентация цепи, являющаяся гамильтоновым графом, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение — контур с одной дополнительной вершиной.

В работе [4] доказывается результат, позволяющий связать минимальные вершинные 1-расширения неориентированных графов и их ориентаций: число дополнительных дуг минимального вершинного 1-расширения орграфа не меньше числа дополнительных рёбер минимального вершинного 1-расширения его симметризации.

Удалось установить следующие результаты.

Теорема 1. Среди ориентаций цепи только гамильтонова цепь имеет минимальное вершинное 1-расширение, содержащее две дополнительные дуги.

Теорема 2. Не существует ориентаций цепей с числом вершин $n > 4$, таких, что их минимальное вершинное 1-расширение содержит три дополнительные дуги.

Полученные теоремы позволяют получить следующее утверждение.

Следствие 1. Любая ориентация цепи с числом вершин $n > 4$, отличная от гамильтоновой цепи, имеет минимальное вершинное 1-расширение с не менее чем четырьмя дополнительными дугами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-25. No. 9. P. 875–884.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.
4. *Абросимов М. Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискретная математика. 2011. № 23:2. С. 93–102.

УДК 519.172.3, 519.68

СВОЙСТВА ГЕННЫХ СЕТЕЙ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Ц. Ч.-Д. Батуева

Описан алгоритм нахождения всех неподвижных точек графа состояний генной сети циркулянтного типа с произвольной булевой функцией. Описаны все истоки графа состояний генной сети с пороговой функцией от k переменных, такой, что существует единственный набор v, для которого $f(v) = 1$. Для таких функций от трёх переменных описаны все циклы графа состояний и вычислены длины максимальных цепочек до цикла.

Ключевые слова: *генная сеть, ориентированный граф, пороговая функция, граф состояний отображения, цикл, неподвижная точка, исток графа состояний.*

Пусть $n \geqslant k$ — натуральные числа. *Циклическим словом* называется периодическое бесконечное в две стороны слово с периодом n; обозначается $a_1a_2\ldots a_n$. Множество всех циклических слов длины n будем обозначать через Ω_n.

Рассмотрим ориентированный граф $G_{n,k+1} = \langle V, E\rangle$, где множество вершин V равно $\{v_1, \ldots, v_n\}$ (последовательность вершин соответствует циклическому слову), а множество рёбер E такое, что каждая вершина v_i имеет входящие рёбра из k предыдущих вершин и выходящие в k следующих вершин.

Пороговой функцией называется булева функция, которая представима в виде $f(x_1, \ldots, x_k) = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i > T\right]$, где a_i — вес аргумента x_i, а T — порог функции f; $a_i, T \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим пороговую функцию f, зависящую от k переменных. Построим отображение $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, которое каждому слову $a_1a_2\ldots a_n$ ставит в соответствие слово $b_1b_2\ldots b_n$, если

$$b_i = f(a_{i-k}, a_{i-k+1}, \ldots, a_{i-1})$$

для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Неподвижной точкой* отображения A_f называется слово α, такое, что $\alpha = A_f(\alpha)$.

Циклическое слово α называется *истоком* для отображения $A_f : \Omega_n \to \Omega_n$, если не существует слова β, такого, что $A_f(\beta) = \alpha$.