ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Проф. Н. Н. ГОРЯЧЕВ

СПОСОБ HALPHEN'A
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТ И ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО К ЦЕРЕРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „КРАСНОЕ ЗНАМЯ“
ТОМСК 1937

Отв. редактор—проф. Л. А. Вишневский.

Тех. редактор—А. Лалетин.

Уполкрайлит № А. 507
Сдано в работу 25/XII-1936 г.
Подписано к печати 8/VII 1937 г.
Статформат 167 × 225/16

Знаков в печатн. л. 67024
Объем 7¼ печ. л., автор.—11,2 л.
Тираж 500 экз.
Заказ № 4940-1936 г.

Типография издательства „Красное Знамя"—Томск, Советская ул. № 3.

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

Проф. Н. Н. ГОРЯЧЕВ

СПОСОБ HALPHEN'A
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТ И ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО К ЦЕРЕРЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „КРАСНОЕ ЗНАМЯ"
ТОМСК 1937

Способ Halphen'a для вычисления вековых возмущений планет и применение его к Церере.

Проф. Н. Н. Горячев.

Целью настоящей работы является выяснить удобство способа Halphen'a для вычисления вековых возмущений планет, причем этот способ берется в том чистом виде (и, надо сказать, очень изящном с теоретической стороны), в котором его предложил сам Halphen.

То обстоятельство, что способ Halphen'a до сих пор не применялся на практике, объясняется на мой взгляд тем, что в формулах Halphen'a есть ошибки, до сих пор, насколько мне известно, в литературе не замеченные; таким образом, если применять формулы Halphen'a сразу к вычислительному процессу, не проверив их, то получаются, конечно, неверные результаты; между тем в исправленном виде этот способ хорош тем, что допускает широкое применение вычислительных машин, так как логарифмически-тригонометрические вычисления здесь сведены до минимума.

Чтобы выяснить и сущность и аппарат формул в применяемых до настоящего времени методах для этой цели, представляется удобным проанализировать сначала способ O. Callandreau (Annales de l'observatoire de Paris T. XVIII. 1885), а затем способ Halphen'a, лишь вскользь остановившись на других работах по этому вопросу (G. W. Hill. On Gauss's method of computing secular perturbations. Astronomical Papers of the American Ephemeris. Vol I, pp. 315—361. 1882. G. W. Hill. Secular perturbations of the Planets. American Journal of Mathematics. Vol. XXIII p. p. 317—336. 1901. Jnnes. R. T. A. Computation of Secular Perturbations. Monthly Notices. May 1907; L. Arndt. Recherches sur le calcul des forces perturbatrices dans la théorie des perturbations séculaires Neuchâtel. 1896).

Кстати, работа Callandreau, анализом которой сейчас займемся, тесно примыкает к 1-й работе Hill'a.

Основоположником всех вышеперечисленных работ был великий Гаусс, в 1818 году опубликовавший свой знаменитый мемуар: „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis data exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita" (Gauss Werke. T. III, p. 331).

Если взять обычные диференциальные уравнения небесной механики,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\, na^2\sqrt{1-e^2}.\left[S.\sin w + T(\cos u + \cos w)\right];\\
\frac{di}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, W.r.\cos\upsilon;\\
\sin i\,\frac{d\theta}{dt} &= \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, W.r.\sin\upsilon;\\
e\frac{d\varpi}{dt} &= 2e\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{m'}{1+m}\, na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right];\\
\frac{dL}{dt} &= -\frac{2m'}{1+m}\, na.S.r + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}.\frac{d\theta}{dt}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

(См. например, Tisserand. Traité de mécanique céleste. T. I. стр. 433), то видно, что строение их правых частей одинаково: эти части суть линейные комбинации проэкций возмущающей силы S; T; W, причем коэффициенты у S; T; W, суть функции элементов орбиты возмущаемого тела; и времени или, если угодно, средней аномалии этого возмущаемого тела; сами же проэкции S; T; W возмущающей силы, завися от координат как возмущающего, так и возмущаемого тела, зависят этим самым от элементов орбит обоих тел и средних их аномалий. В общем и целом все правые части вышенаписанных уравнений (1), если в них считать элементы орбит обоих тел постоянными, как это и делается при учете возмущений лишь 1-го порядка, суть периодические функции средних аномалий обоих тел; эти функции могут быть разложены в ряды Фурье; вековые возмущения какого-либо элемента орбиты, напр, e, получатся после квадратуры конечно только от члена правой части, независимого ни от той, ни от другой средней аномалии, а таковой член, как известно равен

$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dM \int_0^{2\pi} F\,(M;\,M')\,dM'$, где $F\,(M;\,M')$ — правые части

уравнений (1). При интегрировании по M' коэфициенты при S; T; W, как не зависящие от M', должны считаться постоянными, и первая квадратура упирается, следовательно, в вычисление интегралов

$$\frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\,dM';\ \frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} T\,dM';\ \frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} W\,dM'.$$

Возмущающая функция, как известно, состоит из двух частей: первая часть дает силы притяжения от возмущающей планеты на возмущаемую непосредственно, а вторая дает силы притяжения возмущающей планеты на солнце; эти последние силы в проэкции на какие угодно оси координат пропорциональны величинам $\frac{x'}{r'^3}$, $\frac{y'}{r'^3}$, $\frac{z'}{r'^3}$, где x'; y'; z' и r' суть соответственно гелиоцентрические прямоугольные Декартовы координаты возмущающей планеты и ее радиус—вектор в этих осях координат; но $\frac{x'}{r'^3}$; $\frac{y'}{r'^3}$; $\frac{z'}{r'^3}$ на основании уравнений динамики (если брать невозмущенное движение возмущающей планеты, как то и делается при подсчете возмущений первого порядка) пропорциональны

$\frac{d^2x'}{dt^2}$; $\frac{d^2y'}{dt^2}$; $\frac{d^2z'}{dt^2}$, так что, например, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x'}{r'^3}\,dM' =$

$= \frac{n'}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d^2x'}{dt^2}\,dt\,C = C.\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)_A - \left(\frac{dx'}{dt}\right)_A\right] = 0$, где n' среднее

невозмущенное движение, а A — какая-либо точка орбиты. То же можно сказать и про другие два интеграла, т. е. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{y'}{r'^3}\,dM'$

$$\text{и}\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z'}{r'^3}\,dM'.$$

Отсюда следует, что вторая часть возмущающей функции не дает вековых возмущений, а последние получаются только от непосредственного притяжения возмущающей планеты на возмущаемую.

Если теперь мыслить массу возмущающей планеты не как сконцентрированную в какой-либо точке орбиты, а как распределенную по всей орбите, причем плотность в каждом элементе ds' орбиты пропорциональна времени dt, которое возмущающая планета тратит на прохождение элемента ds', то называя $d\mu'$ массу вещества на элементе ds', получим

$$d\mu' : m' = dt : T = dM' : 2\pi.$$

Отсюда

$$S_0 = \frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\,dM' = \int S d\mu'.$$

Но в уравнениях (1) $fm' S$; $fm' T$ и $fm' W$ суть самые прэкции возмущающей силы; следовательно fS_0; fT_0 и fW_0 суть проэкции силы притяжения возмущаемой планеты вышеупомянутым кольцом возмущающей. Отсюда понятно заглавие знаменитого мемуара Гаусса. Все последующие работы и имеют целью дать возможно более простые способы для вычисления интегралов типа:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} SdM'\,;\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} TdM'\,;\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cdot W dM'.$$

Если обозначить через $\triangle$ расстояние между возмущающей и возмущаемой планетами для какого-нибудь момента времени и если взять начало координат в центре орбиты возмущающего тела, а оси x и y направить в плоскости орбиты этого тела: ось x—в перигелий, а ось y—в сторону движения от перигелия, то декартовы координаты возмущающего тела будут $a' \cos \varepsilon'$ и $a' \cos \varphi' \sin\varepsilon'$, где φ' —эксцентрический угол, а ε'—эксцентрическая аномалия возмущающего тела. Тогда $\triangle^2 = (a' \cos \varepsilon' - x)^2 + (a' \cos \varphi' \sin \varepsilon' - y)^2 + z^2 =$ многочлену типа $\gamma_0 - 2f \cos (F - \varepsilon') + \gamma_2 \cos^2 \varepsilon'$, а $\dfrac{\partial\Delta^2}{\partial x}$; $\dfrac{\partial\Delta^2}{\partial y}$; $\dfrac{\partial\Delta^2}{\partial z}$ содержат лишь линейно $\sin \varepsilon'$ и $\cos \varepsilon'$. Поэтому проэкции возмущающей силы должны иметь вид $\left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^3 [M \cos \varepsilon' + N \sin \varepsilon' + P]$, причем M; N и P от возмущающего тела не зависят.

Итак, нашему рассмотрению подлежит интеграл типа

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 [M \cos \varepsilon' + N \sin \varepsilon' + P]\, dg' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 [M \cos \varepsilon' + N \sin \varepsilon' + P]\ (1 - e' \cos \varepsilon')\, d\varepsilon \qquad (2),$$

обозначая, по Hansen'у, через g' среднюю аномалию влиятельной планеты. Ясно, что коэфициенты M, N и P зависят от выбора системы координат, и в выбранной системе координат будут разными для проэкций силы на разные оси координат.

Для дальнейшего полезно уточнить в изложении, как именно Hansen мыслит $\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2$.

Если обозначить через Φ и Ψ расстояния восходящих узлов орбит соответственно возмущенной и возмущающей от восходящего узла возмущенной на возмущающей орбите, а через J—угол между той и другой орбитой, то из формул Деламбра-Гаусса сразу получим

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{1}{2}(i+i') \\
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \cos\frac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\frac{1}{2}(i-i') \\
\cos\frac{J}{2}\sin\frac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \sin\frac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{1}{2}(i+i') \\
\cos\frac{J}{2}\cos\frac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \cos\frac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\frac{1}{2}(i-i')
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а затем, обозначая через π и π' долготы перигелиев орбит, узнаем расстояния Π и Π' от точки пересечения орбит (восходящего узла возмущенной орбиты на возмущающей) до перигелиев той и другой орбиты:

$$\Pi=\pi-\theta-\Phi\,; \qquad \Pi'=\pi'-\theta'-\Psi \tag{4}$$

Окончательно, обозначая через H косинус угла между радиусами векторами планет:

$$H=\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\cos J\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi'),$$

получим

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=\left(\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-\frac{2rr'}{a^2}H,$$

при чем f и f'—истинные аномалии.

Если ввести вспомогательные величины к; K; k_1; K_1; A; B; C; D посредством уравнений:

$$\begin{aligned}
\cos J.\sin\Pi' &= k\sin K \\
\cos\Pi' &= k\cos K \quad (k>0) \\
A &= k.\cos(\Pi-K)\,; \\
C &= k.\sin(\Pi-K);
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\sin\Pi' &= k_1\sin K_1 \\
\cos J.\cos\Pi' &= k_1\cos K_1 \quad (k_1>0) \\
B &= k_1\sin(\Pi-K_1)\,; \\
D &= k_1\cos(\Pi-K_1)\,;
\end{aligned}$$

то выражение H упрощается и сделается

$$H=A\cos f\cos f'-C\sin f\cos f'+B\cos f\sin f,+D\sin f\sin f'$$

Если подставить это выражение H в вышенаписанное выражение $(\Delta{:}a)^2$, а затем вместо r; r'; f; f' ввести эксцентрические аномалии по известным уравнениям:

$$r=a(1-e\cos\varepsilon)\,;\quad r\cos f=a(\cos\varepsilon-e)\,;\quad r'\cos f'=a'(\cos\varepsilon'-e')$$
$$r'=a'(1-e'\cos\varepsilon')\,;\quad r\sin f=a\cos\varphi\sin\varepsilon\,;\quad r'\sin f'=a'\cos\varphi'\sin\varepsilon',$$

то $(\Delta:a)^2$ обратится в выражение типа $\gamma_0-\gamma_1 \cos \varepsilon'-\beta_0 \sin \varepsilon'+\alpha^2 e'^2 \cos^2 \varepsilon'$, где $\alpha=a':a$ есть отношение больших полуосей орбит, а коэфициенты γ_0; γ_1; β_0 зависят лишь от ε; полагая наконец

$$\beta_0=2f \sin F; \quad \gamma_1=2f \cos F,$$

будем иметь

$$(\Delta:a)^2=\gamma_0-2f \cos(F-\varepsilon')+\gamma_2 \cos^2 \varepsilon'; \quad (\gamma_2=\alpha^2 e'^2) \tag{5}$$

Сейчас же полезно сделать следующее замечание, которое будет нам полезно впоследствии: если временно оси координат расположить так, что оси x и y — по главным осям возмущающей орбиты, а начало координат — в центре орбиты, то, обозначая x; y; z координаты возмущаемой планеты, имеем

$$\Delta^2=(x-a' \cos \varepsilon')^2+(y-a' \cos \varphi' \sin \varepsilon')^2+z^2;$$

если привести правую часть этого равенства к правой части (5), то видно, что $\gamma_0=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2}+\alpha^2 \cos^2 \varphi'$; отсюда и получается то важное замечание, что γ_0 есть величина существенно положительная и большая, чем $\alpha^2 \cos^2 \varphi'$.

Теперь можно вплотную заняться приведением интеграла (2) к каноническому виду.

Выражение $(\Delta:a)^2=\gamma_0-2f \cos(F-\varepsilon')+\alpha^2 e'^2 \cos^2 \varepsilon'$, как увидим дальше, может быть разложено так:

$$(\Delta:a)^2=C\,[1-q_1 \cos(u-Q_1)]\;[1-q_2 \cos(u-Q_2)],$$

где

$$|q_1|<1;\ |q_2|<1, \text{ а } Q_1 \text{ и } Q_2$$

вещественные величины (ε' временно обозначено u). Заменим в каждом из множителей $\sin u$ и $\cos u$ их рациональными выражениями через $tg\dfrac{u}{2}$;

$$\sin u=2tg\frac{u}{2}:\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right); \cos u=\left(1-tg^2\frac{u}{2}\right):\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right),$$

тогда

$$[1-q_1 \cos(u-Q_1)]\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)=1+tg^2\frac{u}{2}-q_1 \cos Q_1\left(1-tg^2\frac{u}{2}\right)+$$

$$-q_1 \sin Q_1 . 2tg\frac{u}{2}=(1+q_1 \cos Q_1)\, tg^2\frac{u}{2}-2q_1 \sin Q_1\, tg\frac{u}{2}+$$

$$+(1-q_1 \cos Q_1);$$

если теперь помножить обе части этого равенства на $(1+q_1 \cos Q_1)$, то окажется

$$[1-q_1 \cos(u-Q_1)]\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)(1+q_1 \cos Q_1)=$$

$$=[(1+q_1 \cos Q_1)\, tg\frac{u}{2}-q_1 \sin Q_1]^2+1-q_1^2$$

а поэтому, присоединяя аналогичные множители с q_2 и Q_2:

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)^2\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=\frac{C}{(1+q_1 \cos Q_1)(1+q_2 \cos Q_2)}\times$$

$$\times\left\{\left[(1+q_1\cos Q_1)\,tg\frac{u}{2}-q_1\sin Q_1\right]^2+1-q_1^2\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[(1+q_2\cos Q_2)\,tg\frac{u}{2}-q_2\sin Q_2\right]^2+1-q_2^2\right\}.$$

После этого сделаем еще подстановку

$$tg\frac{u}{2}=\left(p+q\,s\,.\,tg\frac{\varphi}{2}\right):\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right) \tag{6}$$

На основании (6) получаются соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
\cos u &= \frac{\frac{1}{2}\left[1-p^2-(1-q^2)s^2\right]\cos\varphi+(1-pq)s.\sin\varphi+}{t}\\
&\quad\frac{+\frac{1}{2}\left[1-p^2+(1-q^2)s^2\right]}{t}\\
\sin u &= \frac{(p-qs^2)\cos\varphi+(p+q)s.\sin\varphi+p+qs^2}{t}\\
t &= \frac{1}{2}\left[1+p^2-(1+q^2)s^2\right]\cos\varphi+(1+pq)\,s.\sin\varphi+\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[1+p^2+(1+q^2)\,s^2\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Выберем теперь коэфициенты p и q в подстановке (6) так, чтобы по внесении $tg\frac{u}{2}$ из (6) в оба множителя типа

$$\left[(1+q_i\cos Q_i)\,tg\frac{u}{2}-q_i\sin Q_i\right]^2+1-q_i^2\quad(i=1\,;\,2)$$

в числителях полученных выражений не оказалось членов с первыми степенями $tg\frac{\varphi}{2}$; условие это сведется к двум требованиям типа

$$\left[(1+q_i\cos Q_i)\,p-q_i\sin Q_i\right]\left[(1+q_i\cos Q_i)\,q-q_i\sin Q_i\right]+1-q_i^2=0$$

или по упрощении

$$(1+q_1\cos Q_1)\,p\,q-(p-q)\,q_1\sin Q_1+1-q_1\cos Q_1=0$$

$$(1+q_2\cos Q_2)\,p\,q-(p+q)\,q_2\sin Q_2+1-q_2\cos Q_2=0\,;$$

Из этих двух условий следует

$$\frac{p+q}{2}=\frac{q_1\cos Q_1-q_2\cos Q_2}{q_1\sin Q_1-q_2\sin Q_2+q_1\,q_2\sin(Q_1-Q_2)}\,;$$

$$pq=\frac{-q_1\sin Q_1+q_2\sin Q_2+q_1\,q_2\sin(Q_1-Q_2)}{q_1\sin Q_1-q_2\sin Q_2+q_1\,q_2\sin(Q_1-Q_2)}\,;$$

Небесполезно заметить, что величины p и q, получаемые из этих условий,—вещественны; в самом деле, условие вещественности их

$$(q_1 \cos Q_1 - q_2 \cos Q_2)^2 - [q_1 \sin Q_1 - q_2 \sin Q_2 + q_1 q_2 \sin (Q_1 - Q_2)] \times$$
$$\times [-(q_1 \sin Q_1 - q_2 \sin Q_2) + q_1 q_2 \sin (Q_1 - Q_2)] > 0$$

обращается в

$$(q_1 \cos Q_1 - q_2 \cos Q_2)^2 - q_1^2 q_2^2 \sin^2 (Q_1 - Q_2) + (q_1 \sin Q_1 - q_2 \sin Q_2)^2 > 0$$

или в

$$q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 \cos (Q_1 - Q_2) - q_1^2 q_2^2 \sin^2 (Q_1 - Q_2) > 0,$$

а это последнее может быть переписано так:

$$(q_1 - q_2)^2 + 4q_1 q_2 \sin^2 \frac{Q_1 - Q_2}{2} - 4q_1^2 q_2^2 \sin^2 \frac{Q_1 - Q_2}{2} \cos^2 \frac{Q_1 - Q_2}{2} > 0$$

или

$$(q_1 - q_2)^2 + 4q_1 q_2 \sin^2 \frac{Q_1 - Q_2}{2} \left(1 - q_1 q_2 \cos^2 \frac{Q_1 - Q_2}{2}\right) > 0,$$

а в силу того, что $|q_1 q_2| < 1$, последняя скобка положительна и меньше единицы, так что неравенство удовлетворяется.

Положим еще $p = tg\frac{\mu}{2}$; $q = tg\frac{\nu}{2}$ и рассмотрим один из предыдущих преобразованных множителей, а именно

$$\frac{\left[(1 + q_1 \cos Q_1)\left(p + q s\, tg\frac{\varphi}{2}\right) - q_1 \sin Q_1\left(1 + s\, tg\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2}{\left(1 + s\, tg\frac{\varphi}{2}\right)^2} +$$

$$+\frac{(1 - q_1^2)\left(1 + s\, tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(1 + s\, tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

Числитель этого выражения, при отсутствии в нем члена с первой степенью $tg\frac{\varphi}{2}$ напишется так

$$[(1 + q_1 \cos Q_1)p - q_1 \sin Q_1]^2 + 1 - q_1^2 + \{[(1 + q_1 \cos Q_1)q_1 - q_1 \sin Q_1]^2 +$$
$$+ 1 - q_1^2\} s^2 tg^2\frac{\varphi}{2}$$

Здесь слагаемое без $tg^2\frac{\varphi}{2}$ напишется проще

$$(1 + q_1 \cos Q_1)[(1 + q_1 \cos Q_1)p^2 - 2pq_1 \sin Q_1 + 1 - q_1 \cos Q_1],$$

а коэфициент при $s^2 tg^2\frac{\varphi}{2}$ напишется проще

$$(1 + q_1 \cos Q_1)\ [(1 + q_1 \cos Q_1)q^2 - 2qq_1 \sin Q_1 + 1 - q_1 \cos Q_1]$$

Вводя вышеупомянутые углы μ и ν, мы будем иметь

$$(1 + q_1 \cos Q_1)p^2 - 2pq_1 \sin Q_1 + 1 - q_1 \cos Q_1 =$$

$$=\frac{1}{1+\cos\mu}\left\{(1+q_1\cos Q_1)(1-\cos\mu)-2\sin\mu q_1\sin Q_1+\right.$$

$$\left.+(1-q_1\cos Q_1)(1+\cos\mu)\right\}^2=\frac{1}{1+\cos\mu}\left\{2-2q_1\cos Q_1\cos\mu+\right.$$

$$\left.-2q_1\sin Q_1\sin\mu\right\}=\sec^2\frac{\mu}{2}\,[1-q_1\cos(\mu-Q_1)]=R_{1_\mu}\sec^2\frac{\mu}{2},$$

полагая $\qquad R_{1_\mu}=1-q_1\cos(\mu-Q_1)$

Аналогично, полагая $R_{1_\nu}=1-q_1\cos(\nu-Q_1)$, имеем

$$(1+q_1\cos Q_1)\,q^2-2qq_1\sin Q_1+1-q_1\cos Q_1=R_{1_\nu}\sec^2\frac{\nu}{2},$$

так что весь первый преобразованный множитель напишется в виде:

$$(1+q_1\cos Q_1)\frac{R_{1_\mu}\sec^2\frac{\mu}{2}+R_{1_\nu}\sec^2\frac{\nu}{2}\,s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}}{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2},$$

Аналогично напишется 2-й преобразовнный множитель, полагая:

$$R_{2_\mu}=1-q_2\cos(\mu-Q_2);\quad R_{2\nu}=1-q_2\cos(\nu-Q_2),$$

а именно

$$(1+q_2\cos Q_2)\frac{\text{ses}^2\frac{\mu}{2}R_{2_\mu}+\sec^2\frac{\nu}{2}\,R_{2_\nu}\,s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}}{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

Таким образом в общем

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(\sec^2\frac{\mu}{2}R_{1_\mu}+\sec^2\frac{\nu}{2}R_{1_\nu}.s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sec^2\frac{\mu}{2}R_{2_\mu}+\sec^2\frac{\nu}{2}R_{2_\nu}\,s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right)}{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^4}.C$$

Далее:

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2=\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2+\left(p+q\,s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2=$$

$$=(1+p^2)+2(1+pq)\,s\,tg\frac{\varphi}{2}+(1+q^2)\,s^2tg^2\frac{\varphi}{2}=$$

$$=\frac{1}{1+\cos\varphi}\left\{(1+p^2)\,(1+\cos\varphi)+2(1+pq)\,s.\sin\varphi+(1+q^2)\,s^2\times\right.$$

$$\left.\times(1-\cos\varphi)\right\}=\frac{1}{1+\cos\varphi}\left\{1+p^2+(1+q^2)\,s^2+[1+p^2-s^2(1+q^2)]\cos\varphi+\right.$$

$$+2(1+pq)\,s.\sin\varphi\Big\}=\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)\left\{\frac{1+p^2+(1+q^2)s^2}{2}+s(1+pq)\sin\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1+p^2-s^2(1+q^2)}{2}.\cos\varphi\right\}=\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right).t$$

Следовательно

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)^2\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^4=t^2\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

а поэтому

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 t^2\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^2=\left(\sec^2\frac{\mu}{2}R_{1\mu}+\sec^2\frac{\nu}{2}R_{1\nu}\,s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sec^2\frac{\mu}{2}R_{2\mu}+\right.$$

$$\left.+\sec^2\frac{\nu}{2}R_{2\nu}\,s^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}\right).C \tag{8}$$

Далее, беря диференциалы от (6), имеем:

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)\frac{du}{2}=\frac{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)qs-\left(p+q\,s\,tg\frac{\varphi}{2}\right).s}{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{2}$$

или проще

$$\left(1+tg^2\frac{u}{2}\right)du=\frac{(q-p)\,s}{\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi;$$

Но, как мы только что видели,

$$\left(1+s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2+\left(p+q\,s\,tg\frac{\varphi}{2}\right)^2=t\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right);$$

следовательно

$$t\,du=(q-p)\,s\,d\varphi \tag{9}$$

Подчиним теперь остававшееся пока произвольным s условию

$$\sec^4\frac{\mu}{2}R_{1\mu}\,R_{2\mu}=\sec^4\frac{\nu}{2}R_{2\mu}\,R_{2\nu};$$

тогда ясно, что из формулы (8) следует

$$t^2\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=\text{выражению вида } D\left(\sin^4\frac{\varphi}{2}+\cos^4\frac{\varphi}{2}\right)+E\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

что может быть приведено к виду

$$t^2\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=G+G'\sin^2\varphi+G''\cos^2\varphi,$$

а интересующий нас интеграл, как сейчас увидим, сведется к эллиптическим интегралам 1-го и 2-го рода.

Во всяком случае предыдущий простой анализ показывает, что преобразование

$$\cos\varepsilon'=\frac{\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T}{\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T};\quad \sin\varepsilon'=\frac{\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T}{\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T} \tag{10}$$

с вещественными коэфициентами здесь ведет к цели; исследованием этого преобразования для практических вычислительных целей и занимаются дальше Hill и Callandreau. Гаусс первый указал это преобразование, но до практического применения формулы не довел.

Из преобразования (10) следует, что должно быть тождественно:

$$(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)^2+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)^2+$$
$$-(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)^2=0\,,$$

что возможно лишь, если левая часть сводится к $K(\sin^2 T+\cos^2 T-1)$ или, так как α_i; β_i; γ_i; $(i=1;2;3)$ могут быть умножены на одно и то же число, не меняя (10), чтобы

$$(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)^2+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)^2+$$
$$-(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)^2=\cos^2 T+\sin^2 T-1\,.$$

Тождественность этого равенства возможна конечно в том и только в том случае, если

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha^2+\beta^2-\gamma^2=-1\,; & \alpha\alpha''+\beta\beta'-\gamma\gamma'=0\\ \alpha'^2+\beta'^2-\gamma'^2=+1\,; & \alpha\alpha''+\beta\beta''-\gamma\gamma''=0\\ \alpha''^2+\beta''^2-\gamma''^2=+1\,; & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''-\gamma'\gamma''=0\end{array}\right\}\quad(11)$$

Таким образом между 9 величинами α; β; γ... уже есть шесть необходимых соотношений.

Если знаменатель в (10) обозначить через t, то можно писать

$$\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T=t\cos\varepsilon'$$

$$\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T=t\sin\varepsilon'$$

$$\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T=t.$$

Умножая сперва первое из этих равенств на α, второе на β и третье на $-\gamma$, и затем складывая, потом умножая 1-ое на α', второе на β', третье на $-\gamma'$ и складывая и наконец умножая первое α'', второе на β'', третье на $-\gamma''$ и складывая, умозаключаем, что (на основании (11))

$$-1=t\,(\alpha\cos\varepsilon'+\beta\sin\varepsilon'-\gamma)\,;\ \sin T=t\,(\alpha'\cos\varepsilon'+\beta'\sin\varepsilon'-\gamma')\,;$$
$$\cos T=t\,(\alpha''\cos\varepsilon'+\beta''\sin\varepsilon'-\gamma'')\,;$$

Так как мы хотим, чтобы было

$$t^2\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2=G(-1)^2-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T,$$

то, подставляя сюда вместо -1; $\sin T$; $\cos T$ только что написанные значения, а вместо $(\Delta:a)^2$ выражение (5), легко умозаключаем, что должно быть

$$\left.\begin{array}{ll}G\alpha^2-G'\alpha'^2+G''\alpha''^2=\gamma_2\,; & G\alpha\beta-G'\alpha'\beta'+G''\alpha''\beta''=0\,;\\ G\beta^2-G'\beta'^2+G''\beta''^2=0\,; & G\beta\gamma-G'\beta'\gamma'+G''\beta''\gamma''=f\sin F\\ G\gamma^2-G'\gamma'^2+G''\gamma''^2=\gamma_0\,; & G\gamma\alpha-G'\gamma'\alpha'+G''\gamma''\alpha''=f\cos F\,;\end{array}\right\}\quad(12)$$

Ясно, что 12 уравнений (11) и (12) достаточны для нахождения 12 величин

$$G;\ G';\ G'';\quad \alpha;\ \alpha';\ \alpha'';\quad \beta;\ \beta';\ \beta'';\quad \gamma;\ \gamma';\ \gamma'';$$

Теперь нужно иметь суждение о том, как на основании (10) выражается $d\varepsilon'$ через dT.

Беря диференциалы от (10), имеем

$$-\sin\varepsilon'\,d\varepsilon' = \frac{1}{t^2}.\left[(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)\,(\alpha'\cos T-\alpha''\sin T)+\right.$$
$$\left.-(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)\,(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)\right]dT;$$
$$\cos\varepsilon'\,d\varepsilon' = \frac{1}{t^2}\left[(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)\,(\beta'\cos T-\beta''\sin T)+\right.$$
$$\left.-(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)\,(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)\right]dT$$

Возводя каждое равенство в квадрат, а затем складывая их, имеем

$$t^4\,d\varepsilon'^2 = \Big\{(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)^2.\left[(\alpha'\cos T-\alpha''\sin T)^2+\right.$$
$$\left.+(\beta'\cos T-\beta''\sin T)^2\right]+(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)^2\times$$
$$\times\left[(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)^2+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)^2\right]+$$
$$-2(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)\,(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)\times$$
$$\times\left[(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)(\alpha'\cos T-\alpha''\sin T)+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)\times\right.$$
$$\left.\times(\beta'\cos T-\beta''\sin T)\right]\Big\}\,dT^2.$$

Пользуясь соотношениями (11), имеем

$$(\alpha'\cos T-\alpha''\sin T)^2+(\beta'\cos T-\beta''\sin T)^2=\cos^2 T(1+\gamma'^2)+$$
$$+\sin^2 T(1+\gamma''^2)-2\sin T\cos T\gamma'\gamma''=1+\gamma'^2\cos^2 T+\gamma''\sin^2 T+$$
$$-2\gamma'\gamma''\sin T\cos T;$$
$$(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)^2+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)^2=(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)^2$$
$$(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)\,(\alpha'\cos T-\alpha''\sin T)+(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)\times$$
$$\times(\beta'\cos T-\beta''\sin T)=\cos T\gamma\gamma'+\sin T\cos T(1+\gamma'^2)+$$
$$+\cos^2 T\gamma'\gamma''-\sin T.\gamma\gamma''-\sin^2 T.\gamma'\gamma''-\sin T\cos T(1+\gamma''^2)=$$
$$=\gamma(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)+\gamma'\sin T(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)+$$
$$+\gamma''\cos T(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)=(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T).t$$

Подставляя все это в предыдущее выражение $t^4\,d\varepsilon'^2$ и удаляя появившийся в обеих частях равенства общий множитель t^2, имеем

$$t^2\,d\varepsilon'^2=\Big\{1+\gamma'^2\cos^2 T+\gamma''^2\sin^2 T-2\gamma'\gamma''\sin T\cos T+(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)^2+$$
$$-2(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)^2\Big\}\,dT^2=\Big\{1+\gamma'^2\cos^2 T+\gamma''^2\sin^2 T+$$
$$-2\gamma'\gamma''\sin T\cos T-(\gamma'\cos T-\gamma''\sin T)^2\Big\}\,dT^2=dT^2$$

Отсюда

$$t\,d\varepsilon'=\pm\,dT$$

Теперь нетрудно посмотреть, какой канонический вид будет иметь интеграл (2); его подинтегральное выражение можно на основании (10) изобразить так:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3(M\cos\varepsilon'+N\sin\varepsilon'+P)\,(1-e'\cos\varepsilon')\,d\varepsilon'=\left(\frac{a^2}{t^2\,\Delta^2}\right)^{3/2}\times$$
$$\times(Mt\cos\varepsilon'+Nt\sin\varepsilon'+Pt).(t-te'\cos\varepsilon')\,td\varepsilon'=\pm\,dT\,(G-G'\sin^2 T+$$
$$+G''\cos^2 T)^{\bullet}\cdot\Big\{M(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)+N(\beta+\beta'\sin T+\beta''\cos T)+$$
$$+P(\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T)\Big\}\;\Big\{\gamma+\gamma'\sin T+\gamma''\cos T+$$

$$-e'(\alpha+\alpha'\sin T+\alpha''\cos T)\Big\}=\pm\left[(M\alpha+N\beta+P\gamma)+(M\alpha'+N\beta'+P\gamma')\sin T+\right.$$
$$\left.+(M\alpha''+N\beta''+P\gamma'')\cos T\right].\left[(\gamma-e'\alpha)+(\gamma'-e'\alpha')\sin T+(\gamma''-e'\alpha'')\cos T\right]\times$$
$$\times(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{-3/2}\,dT$$

Так как интегралы типа

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin T\,d\,T}{(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{3/2}},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos T\,d\,T}{(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{3/2}};$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin T\cos T\,d\,T}{(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{3/2}};$$

равны каждый нулю' потому что под'интегральная функция в разных четвертях окружности принимает равные по величине, но противоположные по знаку значения, то понятно, что если после перемножения двух первых прямых скобок предыдущего выражения обозначить

$$\left.\begin{array}{c}\Gamma=(M\alpha+N\beta+P\gamma)\;(\gamma-e'\alpha);\quad \Gamma'=(M\alpha'+N\beta'+P\gamma')\;(\gamma'-e'\alpha');\\ \Gamma''=(M\alpha''+N\beta''+P\gamma'')\;(\gamma''-e'\alpha'')\end{array}\right\}\quad(13)$$

то интеграл (2) примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma+\Gamma'\sin^2 T+\Gamma''\cos^2 T}{(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{3/2}}\,dT \qquad (14)$$

Таким образом для его вычисления надо возможно удобно уметь найти величины G; G'; G'' с одной и Γ; Γ'; Γ'' с другой стороны.

Займемся сперва величинами G; G'; G'' и покажем, что они удовлетворяют одному и тому же уравнению третьей степени с одной стороны и что они вещественны—с другой стороны.

Для этой цели из группы (12) возьмем три уравнения:

$$G\alpha^2-G'\alpha'^2+G''\alpha''^2=\gamma_2;\quad G\alpha\beta-G'\alpha'\beta'+G''\alpha''\beta''=0;$$
$$G\alpha\gamma-G'\alpha'\gamma'+G''\alpha''\gamma''=f\cos F;$$

умножим первое на α, второе на β, третье на—γ, тогда окажется, сложив,

$$G\alpha(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)-G'\alpha'(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')+G''\alpha''(\alpha''\alpha+\beta''\beta-\gamma''\gamma)=$$
$$=\alpha\gamma_2-\gamma f\cos F;$$

но выражения в скобках можно заменить из (11); тогда

$$-G\alpha=\alpha\gamma_2-\gamma f\cos F \qquad (a)$$

Если те же 3 уравнения умножить соответственно на α'; β' и $-\gamma'$ и сложить, то на основании (11), выйдет

$$-G'\alpha'=\alpha'\gamma_2-\gamma' f\cos F \qquad (b).$$

Если те же 3 уравнения умножить соответственно на α'' β'' и $-\gamma''$ и сложить, то на основании (11) выйдет

$$+G''\alpha''=\alpha''\gamma_2-\gamma'' f\cos F \qquad (c);$$

Возьмем теперь из группы (12) три таких уравнения

$$G\beta\alpha - G'\beta'\alpha' + G''\beta''\alpha' = 0; \quad G\beta^2 - G'\beta'^2 + G''\beta''^2 = 0;$$
$$G\beta\gamma - G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' = f\sin F.$$

Если с ними сделать поочередно три такие же операции, которые делали только что сейчас (умножение сперва на α; β; $-\gamma$, затем на α'; β'; $-\gamma'$ и наконец на α''; β''; $-\gamma''$ и каждый раз сложение), то получается еще три равенства

$$-G\beta = -\gamma f\sin F \qquad (a');$$
$$-G'\beta' = -\gamma' f\sin F \qquad (b');$$
$$+G''\beta'' = -\gamma'' f\sin F \qquad (c');$$

Применивши такие же три операции к уравнениям группы (12)

$$G\gamma\alpha - G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha'' = f\cos F; \quad G\gamma\beta - G'\gamma'\beta' + G''\gamma''\beta'' = f\sin F;$$
$$G\gamma^2 - G'\gamma'^2 + G''\gamma''^2 = \gamma_0,$$

будем иметь еще три равенства

$$-G\gamma = \alpha f\cos F + \beta f\sin F - \gamma\gamma_0 \qquad (a'');$$
$$-G'\gamma' = \alpha' f\cos F + \beta' f\sin F - \gamma'\gamma_0 \qquad (b'');$$
$$+G''\gamma'' = \alpha'' f\cos F + \beta'' f\sin F - \gamma''\gamma_0 \qquad (c'');$$

Теперь для строгости рассуждений следует убедиться, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

не равен нулю; это можно сделать, например, так (Gauss. Determinatio attractionis.....).

Из группы (11) возьмем такие три уравнения:

$$\alpha.\alpha + \beta.\beta + \gamma(-\gamma) = -1$$
$$\alpha'\alpha + \beta'\beta + \gamma'(-\gamma) = 0$$
$$\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''(-\gamma) = 0.$$

Если их трактовать, как три уравнения первой степени с тремя неизвестными α; β и $-\gamma$, то решая их по правилу определителей получим

$$\alpha = \frac{1}{D}(\gamma'\beta'' - \gamma''\beta'); \quad \beta = \frac{1}{D}(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'); \quad -\gamma = \frac{1}{D}(\alpha''\beta' - \alpha'\beta''),$$

или

$$D\alpha = \gamma'\beta'' - \gamma''\beta'; \quad D\beta = \alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'; \quad -\gamma D = \alpha''\beta' - \alpha'\beta'';$$

Умножим теперь первое из этих равенств на $\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$, второе на $\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''$ третье на $-\alpha'\beta'' + \alpha''\beta'$ и результаты сложим; тогда в левой части получится D^2, а в правой сочетание трех квадратов;

$$-(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 - (\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 = \alpha'^2(\beta''^2 - \gamma''^2) + \beta'^2(\alpha''^2 - \gamma''^2) +$$
$$-\gamma'^2(\beta''^2 + \alpha''^2) + 2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + 2\alpha'\alpha''\gamma'\gamma'' - 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' = \alpha'^2(1 - \alpha''^2) + \beta'^2(1 - \beta''^2) +$$
$$-\gamma'^2(1 + \gamma''^2) + 2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + 2\alpha'\alpha''\gamma'\gamma'' - 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' = \alpha'^2 +$$
$$+\beta'^2 - \gamma'^2 - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' - \gamma'\gamma'')^2 = +1.$$

итак $D^2 = +1$, так что $D = +1$ и $D \neq 0$.
Воспользовавшись этим, напишем уравнения (a), (a′) (a″) так;

$$\alpha(G+\gamma_2)+\beta.0+\gamma(-f\cos F)=0; \quad \alpha.0+\beta.G+\gamma(-f\sin F)=0;$$
$$\alpha f\cos F+\beta f\sin F+\gamma(G-\gamma_0)=0;$$

Рассматривая эти 3 равенства как три однородных уравнения 1-й степени с неизвестными α; β; γ, мы умоваключаем, что

$$\begin{vmatrix} G+\gamma_2 & 0 & -f\cos F \\ 0 & G & -f\sin F \\ -f\cos F & -f\sin F & G-\gamma_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ибо эта система имеет не нулевое решение (если бы $\alpha = 0$; $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, то не могло бы быть $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 = -1$ во-первых и было бы $D = 0$, во-вторых; впрочем свойство $D^2 = +1$ нам пригодится далее.) Рассуждая также с уравнениями (b), (b′) и (b″), умозаключаем что

$$\begin{vmatrix} G'+\gamma_2 & 0 & -f\cos F \\ 0 & G' & -f\sin F \\ -f\cos F & -f\sin F & G'-\gamma_0 \end{vmatrix} = 0,$$

а из уравнений (c), (c′), (c″) видно, что

$$\begin{vmatrix} -G''+\gamma_2 & 0 & -f\cos F \\ 0 & -G'' & -f\sin F \\ -f\cos F & -f\sin F & -G''-\gamma_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю последних трех определителей ясно гласит, что G; G' и $-G''$ суть корни кубического уравнения.

$$\begin{vmatrix} x+\gamma_2 & 0 & -f\cos F \\ 0 & x & -f\sin F \\ -f\cos F & -f\sin F & x-\gamma_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

или в раскрытом виде

$$[(x-\gamma_0)(x+\gamma_2)+f^2]x+\gamma_2 f^2\sin^2 F = 0 \qquad (15')$$

Докажем теперь, что три корня этого уравнения вещественны; с этой целью в левую часть (15′) подставим $x = -\gamma_2 = -\alpha^2 e'^2$, тогда левая часть будет равна $-f^2\gamma_2\cos^2 F = -f^2\alpha^2 e'^2\cos^2 F$ — величина явно отрицательная; далее в ту же левую часть подставим $x = 0$; тогда она обратится в $\gamma_2 f^2\sin^2 F = \alpha^2 e'^2 f^2\sin^2 F$—величина явно положительная; подставим еще в левую часть (15) $x = \alpha^2\cos^2\varphi' = \alpha^2(1-e'^2)$, вспомнив предварительно, что из сличения

$$(\Delta : a)^2 = \gamma_0 - 2f\cos(F-\varepsilon') + \gamma_2\cos^2\varepsilon'$$

с.

$$\Delta^2 = (x-a'\cos\varepsilon')^2 + (y-a'\cos\varphi'\sin\varepsilon')^2 + z^2$$

(рассуждения после формулы (5)) следует не только

$$\gamma_0 = (x^2+y^2+z^2) : a^2 + \alpha^2\cos^2\varphi'_{\rho}$$

но и

$$\cos F = \alpha\frac{x}{a}; \; f\sin F = \alpha\frac{y}{a}\cos\varphi'$$

Тогда левая часть (15) обратится в

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 0 & -\alpha\dfrac{x}{a} \\ 0 & \alpha^2\cos^2\varphi' & -\alpha\dfrac{y}{a}\cos\varphi' \\ \alpha\dfrac{x}{a} & \alpha\dfrac{y}{a}\cos\varphi' & -\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha^4}{a^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & \cos^2\varphi' & -y\cos\varphi' \\ x & y\cos\varphi' & -(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} = \frac{\alpha^4}{a^2}\cos^2\varphi'\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ x & y & -(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix} =$$

$= -\dfrac{\alpha^4}{a^2}\cos^2\varphi' . z^2$ — величина явно отрицательная. В заключение в левую часть ($15'$) подставим еще $x = \gamma_0$; тогда эта левая часть обратится в $f^2\gamma_0 + \alpha^2 e'^2 f^2 \sin^2 F$ — величина явно положительная, ибо $\gamma_0 > \alpha^2\cos^2\varphi'$. Из этого рассуждения и ясно, что три корня нашего кубического уравнения вещественны: один лежит между $-\gamma_2 = -\alpha^2 e'^2$ и нулем и следовательно отрицателен; пусть это будет $-G''$, так что $G'' > 0$ и есть абсолютная величина этого корня. следующий в возрастающем порядке корень лежит между нулем и $\alpha^2\cos^2\varphi'$ и следовательно положителен и $< \alpha^2\cos^2\varphi'$; пусть это будет G'; наконец третьий корень этого уравнения, т. е. G лежит между $\alpha^2\cos^2\varphi'$ и $\gamma_0 > \alpha^2\cos^2\varphi'$, так что это—положительный корень с наибольшей абсолютной величиной.

Возьмем теперь уравнения группы (11)

$$\begin{aligned} &\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma(-\gamma') = 0 \\ &\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'(-\gamma') = +1 \\ &\alpha''\alpha' + \beta''\beta' + \gamma''(-\gamma') = 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} &\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma(-\gamma'') = 0 \\ &\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'(-\gamma'') = 0 \\ &\alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''(-\gamma'') = +1 . \end{aligned}$$

Решая их по способу определителей, имеем

$$\alpha' = \frac{1}{D}(\beta''\gamma - \beta\gamma''); \ \beta' = \frac{1}{D}(\alpha\gamma'' - \alpha''\gamma); \ \gamma' = \frac{1}{D}(\alpha''\beta - \alpha\beta'');$$

$$\alpha'' = \frac{1}{D}(\beta\gamma' - \beta'\gamma); \ \beta'' = \frac{1}{D}(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha); \ -\gamma'' = \frac{1}{D}(\alpha\beta' - \alpha'\beta);$$

Если присоединить сюда ранее найденные значения

$$\alpha = \frac{1}{D}(\gamma'\beta'' - \gamma''\beta'); \ \beta = \frac{1}{D}(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'); \ -\gamma = \frac{1}{D}(\alpha''\beta - \alpha\beta'').$$

то получается, например

$$\alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 = \frac{1}{D}[\alpha\gamma'\beta'' - \alpha\gamma''\beta' - \alpha'\beta''\gamma + \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta\gamma' + \alpha''\beta'\gamma];$$

но выражение в скобках есть $-D$, так что $\alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 = -1$. Аналогично можно бы умозаключить, что $\beta^2 - \beta'^2 - \beta''^2 = -1$ и $\gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = +1$.

Далее, $\beta\gamma - \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = \dfrac{1}{D}\left\{\gamma . \begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \gamma'\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha'' & \gamma'' \end{vmatrix} - \gamma''\begin{vmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

ибо $D = 0$. Аналогично усматриваем, что $\gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' = 0$ и $\alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = 0$; таким образом из системы (11) вытекает „сопряженная" система

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 = -1; & \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' = 0 \\ \beta^2 - \beta'^2 - \beta''^2 = -1; & \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' = 0 \\ \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 = +1; & \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' = 0 \end{array}\right| \tag{11'}$$

из уравнений (а) и (а$'$) следует

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{f\cos F}{G + \gamma_2}; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{f\sin F}{G} \tag{16}$$

Аналогичные значения $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ и $\frac{\beta'}{\gamma'}$ получатся из уравнений (в) и (в$'$) с; одной и (с) и (с$'$) с другой стороны. Если теперь эти отношения подставить в однородные уравнения (а$''$); (b$''$); (с$''$), то конечно получаются тождества, потому что G; G' и—G'' суть именно корни кубического уравнения (15), таким образом, если узнать вещественные величины G; G'; $-G''$ из уравнения (15), то уравнений (а); (а$'$); (а)$''$; (в); (в$''$) все еще недостаточно, чтобы узнать девять величин α; α'; α''; β.... Присоединим сюда еще первые три уравнения системы (11); тогда эти девять величин можно будет узнать. Теперь покажем, что: 1) таковые значения α, α'; α''...удовлетворяют трем остальным уравнениям системы (11); 2) что уравнения группы (12) удовлетворяются и 3) что α; α'; α''...вещественны.

Первое положение доказать легко: из уравнений (16) и из

$$\alpha' : \gamma' = f\cos F : (G' + \gamma_2); \quad \beta' : \gamma' = f\sin F : G'$$

следует сразу

$$\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma'}{\gamma\gamma'} = \frac{f^2\cos^2 F}{(G + \gamma_2)(G' + \gamma_2)} + \frac{f^2\sin^2 F}{GG'} - 1 \tag{17}$$

но уравнение (15$'$) можно написать в виде

$$\frac{f^2\cos^2 F}{x + \gamma_2} + \frac{f^2\sin^2 F}{x} + x - \gamma_0 = 0,$$

а поэтому

$$\frac{f^2\cos^2 F}{G + \gamma_2} + \frac{f^2\sin^2 F}{G} + G - \gamma_0 = 0 \text{ и}$$

$$\frac{f^2\cos^2 F}{G' + \gamma_2} + \frac{f^2\sin^2 F}{G'} + G' - \gamma_0 = 0.$$

Вычитая одно из другого эти последние тождества, имеем

$$(G' - G)\left\{\frac{f^2\cos^2 F}{(G + \gamma_2)(G' + \gamma_2)} + \frac{f^2\sin^2 F}{GG'} - 1\right\} = 0,$$

а так как, вообще говоря, $G' \neq G$, то правая часть (17) равна нулю и следовательно $\alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' = 0$; аналогично докажутся 2 последние равенства системы (11), а из того, что удовлетворяется вся система

(11), следует, что удовлетворяется и „сопряженная“ система (11′); 2-е положение тоже нетрудно доказать так: если взять равенства

$$G\alpha = -\alpha\gamma_2 + \gamma f \cos F;\quad G'\alpha' = -\alpha'\gamma_2 + \gamma' f \cos F \text{ и}$$
$$-G''\alpha'' = -\alpha''\gamma_2 + \gamma'' f \cos F$$

и умножить их соответственно на $\alpha; -\alpha'; -\alpha''$, а затем сложить, то в силу системы (11′) сразу получается $G\alpha^2 - G'\alpha'^2 + G''\alpha''^2 = \gamma_2$, то есть 1-е уравнение системы (12); а если умножить эти же три равенства сперва соответственно на $\beta; -\beta'; -\beta''$, а затем соответственно на $\gamma: -\gamma'$ и $-\gamma''$ каждый раз сложить, то в силу той же сопряженной системы (11′) получится еще 2 равенства (12); остальные равенства (12) так же легко доказываются, если взять аналогичные выражения с одной стороны $G\beta; G'\beta'; -G''\beta''$, а с другой стороны $G\gamma; G'\gamma'$ и $-G''\gamma''$, помножить их на подходящие множители и сложить.

Наконец 3-е положение (вещественность $\alpha; \alpha'; \alpha''\ldots$) легко доказать так: правые части уравнений (16) и аналогичных им вещественны; поэтому вещественны и их левые части, а следовательно вещественны и выражения типа

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) : \gamma^2 = -1 : \gamma^2 \text{ и т. д.}$$

так что $\gamma^2; \gamma'^2; \gamma''^2$ не могут быть комплексными (тогда были бы комплексны и левые части), а могут быть вещественными, так что $\gamma; \gamma'; \gamma''$ или вещественны или чисто мнимы; если удастся доказать что

$$\left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 1 = \frac{f^2\cos^2 F}{(G+\gamma_2)^2} + \frac{f^2\sin^2 F}{G^2} - 1 < 0,$$
$$\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)^2 + \left(\frac{\beta'}{\gamma'}\right)^2 - 1 = \frac{f^2\cos^2 F}{(G+\gamma_2)^2} + \frac{f^2\sin^2 F}{G'^2} - 1 > 0;$$
$$\left(\frac{\alpha''}{\gamma''}\right)^2 + \left(\frac{\beta''}{\gamma''}\right)^2 - 1 = \frac{f^2\cos^2 F}{(-G''+\gamma_2)^2} + \frac{f^2\sin^2 F}{G''^2} - 1 > 0 \quad . \; . \; . \; (18); (19); (20),$$

то отсюда будет следовать, что $\gamma^2 > 0$, $\gamma'^2 > 0$; $\gamma''^2 > 0$, т. е. $\gamma; \gamma'; \gamma''$ вещественны, а тогда из вещественности отношений $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}\ldots$ и т. д. будет следовать и вещественность остальных величин $\alpha; \alpha'; \ldots$

Если взять уравнение (15′) в виде

$$\Phi(x) = \frac{f^2\cos^2 F}{x+\gamma_2} + \frac{f^2\sin^2 F}{x} + x - \gamma_0 = 0,$$

то

$$\Phi'(x) = -\frac{f^2\cos^2 F}{(x+\gamma_2)^2} - \frac{f^2\sin^2 F}{x^2} + 1$$

и неравенство (18) гласит, что $\Phi(x)$ в области $x = G$ есть возрастающая функция x; так оно и есть:

$$f(x) = [(x-\gamma_0)\ (x+\gamma_2)) + f^2]\, x + \gamma_2 f^2 \sin^2 F,$$

отличающаяся от $\Phi(x)$ множителем $x(x+\gamma_2)$,
при $x = \alpha^2\cos^2\varphi'$ отрицательна, а при $x = \gamma_0$ положительна, так что при переходе через $x = G$ при изменении x от $G - \delta$ до $G + \delta$ переходит из отрицательной величины в положительную; так же переходит и $\Phi(x)$, ибо $G(G+\gamma_2) > 0$, то есть $\Phi(x)$ при $x = G$ растет с возрастанием аргумента. Далее, неравенство (19) гласит, что $\Phi(x)$ в

области $x = G'$ есть убывающая функция; так оно и есть: $f(x)$ при $x = 0$ положительна, при $x = G'$ равна нулю, а при $x = \alpha^2 \cos^2 \varphi'$ отрицательна; следовательно при возрастании x в области $x = G'$ функция эта переходит с положительных значений в отрицательные; так же ведет себя и $\Phi(x)$, ибо множитель $G'(G' + \gamma_2)$ положителен. Наконец, неравенство (20) гласит, что $\Phi(x)$ в области $x = -G''$ есть убывающая функция; так оно и есть: $f(x)$ при $x = -\gamma_2$ отрицательна, при $x = -G''$ равна нулю, а при $x = 0$ положительна; следовательно, при возрастании x в области $x = -G''$ функция эта переходит из отрицательных значений в положительные; тогда $\Phi(x)$ будет соответственно переходить из положительных значений в отрицательные, так как множитель $-G''(-G'' + \gamma_2)$ отрицателен: $-G''$ отрицательно, а $-G'' + \gamma_2$ положительно, ибо $-G'' > -\gamma_2$. Таким образом все три высказанные положения доказаны.

Теперь обратимся к изучению природы величин Γ; Γ' и Γ'' и связи их с величинами G; G' и $-G''$.

Если взять известные равенства:

$$-G\alpha = -\alpha\gamma_2 + \gamma f \cos F; \quad G'\alpha' = -\alpha'\gamma_2 + \gamma' f \cos F; \quad -G''\alpha'' = -\alpha''\gamma_2 + \gamma'' f \cos F, \tag{d}$$

а затем из квадрата первого вычесть квадрат второго и квадрат третьего, то в силу (11′) окажется

$$G^2\alpha^2 - G'^2\alpha'^2 - G''^2\alpha''^2 = -\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F.$$

Проделав аналогичную операцию с равенствами

$$G\beta = \gamma f \sin F; \quad G'\beta' = \gamma' f \sin F; \quad -G''\beta'' = \gamma'' f \sin F \tag{d'}$$

и

$$\left.\begin{array}{l} G\gamma = -\alpha f \cos F - \beta f \sin F + \gamma\gamma_0; G'\gamma' = -\alpha' f \cos F - \beta' f \sin F + \gamma'\gamma_0; \\ -G''\gamma'' = -\alpha'' f \cos F - \beta'' f \sin F + \gamma''\gamma_0 \end{array}\right\} \tag{d''}$$

получим еще два аналогичные равенства, которые сейчас будут выписаны.

Если далее помножить каждое из равенств (d) на соответствующее ему равенство (d'), а затем из результата первого умножения вычесть результат второго умножения, а затем еще вычесть результат третьего умножения, то окажется

$$G^2\alpha\beta - G'^2\alpha'\beta' - G''^2\alpha''\beta'' = f^2 \sin F \cos F,$$

а если такую же операцию проделать с другими парными комбинациями семейств (d); (d′) (d″), то получатся еще 2 аналогичных формулы. В общем будем иметь следующие шесть равенств, которыми тотчас воспользуемся:

$$\left.\begin{array}{l} G^2\alpha^2 - G'^2\alpha'^2 - G''^2\alpha''^2 = -\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F \\ G^2\beta^2 - G'^2\beta'^2 - G''^2\beta''^2 = f^2\sin^2 F \\ G^2\gamma^2 - G'^2\gamma'^2 - G''^2\gamma''^2 = -f^2 + \gamma_0^2 \\ G^2\beta\gamma - G'^2\beta'\gamma' - G''^2\beta''\gamma'' = \gamma_0 f \sin F \\ G^2\gamma\alpha - G'^2\gamma'\alpha' - G''^2\gamma''\alpha'' = (\gamma_0 - \gamma_2) f \cos F \\ G^2\alpha\beta - G'^2\alpha'\beta' - G''^2\alpha''\beta'' = f^2 \sin F \cos F \end{array}\right\} \tag{21}$$

Вспомним формулы (13):

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma = (M\alpha + N\beta + P\gamma)(\gamma - e'\alpha); \quad \Gamma' = (M\alpha' + N\beta' + P\gamma')(\gamma' - e'\alpha'); \\ \Gamma'' = (M\alpha'' + N\beta'' + P\gamma'')(\gamma'' - e'\alpha'') \end{array}\right\} \tag{13}$$

и формулы (12); если теперь раскрыть правые части формул (13), а затем из первой формулы вычесть вторую и еще вычесть третью, то окажется на основании системы (11′):

$$\Gamma - \Gamma' - \Gamma'' = P + Me';$$

если далее раскрытые уравнения (13) умножить первое на G, второе на G', третье на G'', а затем от первого результата отнять второй и прибавить третьий, то получится на основании (12):

$$\Gamma G - \Gamma' G' + \Gamma'' G'' = Mf\cos F + Nf\sin F + P\gamma_0 - Me'\gamma_2 +$$
$$- Ne'.0 - Pe'f\cos F = (M - e'P)f\cos F + Nf\sin F + P\gamma_0 - e'M\gamma_2$$

Если наконец раскрытые уравнения (13) умножить: первое на G^2, второе на G'^2 и третье на G''^2, а затем из первого результата отнять второй и еще отнять третий, то на основании (21) окажется, что

$$\Gamma G^2 - \Gamma' G'^2 - \Gamma'' G''^2 = M(\gamma_0 - \gamma_2)f\cos F + N\gamma_0 f\sin F + P(-f^2 + \gamma_0^2) +$$
$$- Me'(-\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F) +$$
$$- Ne'f^2\sin F\cos F - Pe'(\gamma_0 - \gamma_2)f\cos F =$$
$$= (M - e'P)(\gamma_0 - \gamma_2)f\cos F + N\gamma_0 f\sin F + P(\gamma_0^2 - f^2) +$$
$$- e'M(-\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F) - e'Nf^2\sin F\cos F.$$

В общем получается три уравнения для неизвестных Γ; Γ'; Γ''

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma - \Gamma' - \Gamma'' = U \\ &\Gamma G - \Gamma' G' + \Gamma'' G'' = U' \\ &\Gamma G^2 - \Gamma' G'^2 - \Gamma'' G''^2 = U'' \end{aligned}\right| \qquad (22),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &U = P + Me'; \quad U' = (M - e'P)f\cos F + Nf\sin F + P\gamma_0 - e'M\gamma_2; \\ &U'' = (M - e'P)(\gamma_0 - \gamma_2)f\cos F + N\gamma_0 f\sin F + P(\gamma_0^2 - f^2) + \\ &\quad - e'M(-\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F) - e'Nf^2\sin F\cos F \end{aligned}\right| \quad (23)$$

В уравнениях (22) правые части U; U'; U'' надо считать известными.

Возьмем теперь формальное разложение в ряд

$$\frac{\Gamma}{x - G} + \frac{-\Gamma'}{x - G'} + \frac{-\Gamma''}{x + G''} = \frac{\Gamma - \Gamma' - \Gamma''}{x} + \frac{\Gamma G - \Gamma' G' + \Gamma'' G''}{x^2} +$$
$$+ \frac{\Gamma G^2 - \Gamma' G'^2 - \Gamma'' G''^2}{x^3} + \ldots = Ux^{-1} + U'x^{-2} + U''x^{-3} + \ldots =$$
$$= \frac{\lambda x^2 + Sx + R}{x^3 + Ax^2 + Bx + C},$$

где знаменатель последней дроби есть левая часть уравнения (15′), то есть

$$A = \gamma_2 - \gamma_0; \quad B = f^2 - \gamma_0\gamma_2; \quad C = \gamma_2 f^2 \sin^2 F.$$

Каковы коэффициенты λ; S; R?

Если формально дробь

$$\frac{\lambda x^2 + Sx + R}{x^3 + Ax^2 + Bx + C}$$

разложить в ряд по убывающим степеням x, то окажется

$$(\lambda x^2 + Sx + R) : (x^3 + Ax^2 + Bx + C) = \lambda x^{-1} + (S - A\lambda)x^{-2} +$$
$$+ (R - B\lambda - AS + A^2\lambda)x^{-3} + \ldots,$$

откуда

$$\lambda = U;\quad S = AU + U';\quad R = AU' + BU + U'',$$

так что

$$\lambda = P + Me';\quad S = (\gamma_2 - \gamma_0)(P + Me') + (M - e'P) f\cos F + N f\sin F + P\gamma_0 - e'M\gamma_2 = P\gamma_2 - Me'\gamma_0 + (M - e'P) f\cos F + N f\sin F;$$

$$R = (f^2 - \gamma_0\gamma_2)(P + Me') + (\gamma_2 - \gamma_0)(M - e'P) f\cos F + (\gamma_2 - \gamma_0) N f\sin F + (\gamma_2 - \gamma_0) P\gamma_0 - (\gamma_2 - \gamma_0) e'M\gamma_2 + (M - e'P)(\gamma_0 - \gamma_2) f\cos F + N\gamma_0 f\sin F + P(\gamma_0^2 - f^2) - e'M(-\gamma_2^2 + f^2\cos^2 F) - e'Nf^2\sin F\cos F =$$
$$= e'M(f^2 - \gamma_0\gamma_2 - \gamma_2^2 + \gamma_0\gamma_2 + \gamma_2^2 - f^2\cos^2 F) + N\gamma_2 f\sin F + - e'Nf^2\sin F\cos F = e'Mf^2\sin^2 F + N\gamma_2 f\sin F - e'Nf^2\sin F\cos F;$$

окончательно

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = P + Me';\quad S = P\gamma_2 - Me'\gamma_0 + (M - e'P) f\cos F + N f\sin F;\\ R = f\sin F\,[N\gamma_2 - e'Nf\cos F + e'Mf\sin F]\end{array}\right\}\quad (23')$$

и

$$\frac{\lambda x^2 + Sx + R}{(x - G)(x - G')(x + G'')} = \frac{\Gamma}{x - G} + \frac{-\Gamma'}{x - G'} + \frac{-\Gamma''}{x + G''}.$$

Так как при разложении дроби, (у которой степень числителя меньше степени знаменателя), на простейшие числитель каждой простейшей дроби равен значению числителя сложной дроби при $x =$ соответственному корню знаменателя, деленному на значение производной знаменателя сложной дроби при $x =$ тому же корню, то дело не нарушится, если мы к $\lambda x^2 + Sx + R$ прибавим выражение, обращающееся в нуль при $x = G$; G';—G''; за таковое выражение возьмем (с постоянным множителем) левую часть кубического уравнения в виде

$$x - \gamma_0 + \frac{f^2\cos^2 F}{x + \gamma_2} + \frac{f^2\sin^2 F}{x} \qquad (\alpha)$$

Если выражение $\lambda x^2 + Sx + R$ при значениях (23) его коэффициентов расположить по буквам M; N; P, то окажется

$$\lambda x^2 + Sx + R = Px\,[x + \gamma_2 - e' f\cos F] + N f\sin F\,[x + \gamma_2 - e' f\cos F] + M\,[e'x^2 - e'x\gamma_0 + xf\cos F + e' f^2\sin^2 F].$$

Здесь последнюю скобку представим в виде

$$e'x\,(x - \gamma_0) + f\cos F\,x + e' f^2\sin^2 F$$

и вычтем из нее, что, как мы говорили, законно, выражение (α), умноженное на $e'x$; тогда последняя скобка обратится в

$$-\frac{e'xf^2\cos^2 F}{x + \gamma_2} - \frac{e'xf^2\sin^2 F}{x} + f\cos F\,x + e'f^2\sin^2 F =$$
$$= \frac{xf\cos F}{x + \gamma_2}\,[x + \gamma_2 - e' f\cos F],$$

а все выражение числителя сложной дроби будет

$$(x + \gamma_2 - e' f\cos F)\left(Px + Nf\sin F + \frac{Mxf\cos F}{x + \gamma_2}\right)$$

или

$$x\,(x + \gamma_2)\left(1 - \frac{e' f\cos F}{x + \gamma_2}\right)\left(P + \frac{Nf\sin F}{x} + \frac{Mf\cos F}{x + \gamma_2}\right). \qquad (\beta)$$

Возьмем теперь из групп (11′) (12) и (21) по одному уравнению, а именно

$$\gamma^2-\gamma'^2-\gamma''^2=+1;\quad G\gamma^2-G'\gamma'^2+G''\gamma''^2=\gamma_0;$$

$$G^2\gamma^2-G'^2\gamma'^2-G''^2\gamma''^2=\gamma_0^2-f^2$$

и применим к ним точно такие же рассуждения, которые только что сделаны по поводу системы (22) и разложение дроби на простейшие; здесь

$$\Gamma=\gamma^2;\quad -\Gamma'=-\gamma'^2;\quad -\Gamma''=-\gamma''^2;\quad U=+1;\quad U'=\gamma_0;$$

$U''=\gamma_0^2-f^2$; A; B; C — те-же.

Тогда

$$\lambda=+1;\quad S=AU+U'=\gamma_2-\gamma_0+\gamma_0=\gamma_2;$$

$$R=AU'+BU+U''=(\gamma_2-\gamma_0)\,\gamma_0+(f^2-\gamma_0\gamma_2)+\gamma_0^2-f^2=0,$$

так что числитель сложной дроби будет просто

$$x^2+\gamma_2\,x=x\,(x+\gamma_2),\ a\ \gamma^2;-\gamma'^2;-\gamma''^2$$

будут числителями простейших дробей.

Сопоставляя изложенные результаты, можно сказать, что например

$$\Gamma=\frac{G\,(G+\gamma_2)\left(1-\dfrac{e'f\cos F}{G+\gamma_2}\right)\left(P+\dfrac{Nf\sin F}{G}+\dfrac{Mf\cos F}{G+\gamma_2}\right)}{(G-G')\,(G+G'')},$$

$$\gamma^2=\frac{G\,(G+\gamma_2)}{(G-G')\,(G+G'')};$$

отсюда

$$\Gamma:\gamma^2=\left(1-\frac{e'f\cos F}{G+\gamma_2}\right)\left(P+\frac{Nf\sin F}{G}+\frac{Mf\cos F}{G+\gamma_2}\right),$$

но, как было ранее указано,

$$\frac{f\cos F}{G+\gamma_2}=\frac{\alpha}{\gamma};\quad \frac{f\sin F}{G}=\frac{\beta}{\gamma};$$

поэтому

$$\Gamma:\gamma^2=\left(1-e'\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(M\frac{\alpha}{\gamma}+N\frac{\beta}{\gamma}+P\right)=\frac{1}{\gamma^2}\,(\gamma-e'\alpha)\,(M\alpha+N\beta+P),$$

а оно так и есть (первая формула (13)).

Так же можно проверить прежние значения Γ' и Γ''. Ввиду того, что

$$\Gamma=\Gamma'+\Gamma''+\lambda,$$

вопрос упирается в вычисление интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2\Gamma'+\Gamma''+\lambda)\sin^2 T+(\Gamma'+2\Gamma''+\lambda)\cos^2 T}{(G-G'\sin^2 T+G''\cos^2 T)^{3/2}}\,dT \tag{24}$$

Величины γ_0; γ_2; f; F, если можно так выразиться, „универсальны“, то есть одинаковы, каким бы типом интегралов (24) мы ни интересовались, то есть о какой бы проэкции возмущающей силы речь ни шла; между тем величины M; N; P индивидуальны, то есть для каждого типа интегралов различны, а поэтому различны и λ; S; R, а следовательно различны и Γ'; Γ''; λ.

Возьмем теперь из групп (11′) (12) и (21) по одному уравнению, а именно

$$\gamma^2-\gamma'^2-\gamma''^2=+1;\quad G\gamma^2-G'\gamma'^2+G''\gamma''^2=\gamma_0;$$
$$G^2\gamma^2-G'^2\gamma'^2-G''^2\gamma''^2=\gamma_0{}^2-f^2$$

и применим к ним точно такие же рассуждения, которые только что сделаны по поводу системы (22) и разложение дроби на простейшие; здесь

$$\Gamma=\gamma^2;\quad -\Gamma'=-\gamma'^2;\quad -\Gamma''=-\gamma''^2;\quad U=+1;\quad U'=\gamma_0;$$

$U''=\gamma_0{}^2-f^2$; A; B; C — те-же.

Тогда

$$\lambda=+1;\quad S=AU+U'=\gamma_2-\gamma_0+\gamma_0=\gamma_2;$$
$$R=AU'+BU+U''=(\gamma_2-\gamma_0)\,\gamma_0+(f^2-\gamma_0\gamma_2)+\gamma_0{}^2-f^2=0,$$

так что числитель сложной дроби будет просто

$$x^2+\gamma_2\,x=x\,(x+\gamma_2),\ a\ \gamma^2;-\gamma'^2;-\gamma''^2$$

будут числителями простейших дробей.

Сопоставляя изложенные результаты, можно сказать, что например

$$\Gamma=\frac{G\,(G+\gamma_2)\left(1-\dfrac{e'f\cos F}{G+\gamma_2}\right)\left(P+\dfrac{Nf\sin F}{G}+\dfrac{Mf\cos F}{G+\gamma_2}\right)}{(G-G')\,(G+G'')},$$
$$\gamma^2=\frac{G\,(G+\gamma_2)}{(G-G')\,(G+G'')};$$

отсюда

$$\Gamma:\gamma^2=\left(1-\frac{e'f\cos F}{G+\gamma_2}\right)\left(P+\frac{Nf\sin F}{G}+\frac{Mf\cos F}{G+\gamma_2}\right),$$

но, как было ранее указано,

$$\frac{f\cos F}{G+\gamma_2}=\frac{\alpha}{\gamma};\quad \frac{f\sin F}{G}=\frac{\beta}{\gamma};$$

поэтому

$$\Gamma:\gamma^2=\left(1-e'\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(M\frac{\alpha}{\gamma}+N\frac{\beta}{\gamma}+P\right)=\frac{1}{\gamma^2}\,(\gamma-e'\alpha)\,(M\alpha+N\beta+P),$$

а оно так и есть (первая формула (13)).

Так же можно проверить прежние значения Γ' и Γ''. Ввиду того, что

$$\Gamma=\Gamma'+\Gamma''+\lambda,$$

вопрос упирается в вычисление интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2\Gamma'+\Gamma''+\lambda)\sin^2T+(\Gamma'+2\Gamma''+\lambda)\cos^2T}{(G-G'\sin^2T+G''\cos^2T)^{3/2}}\,dT \tag{24}$$

Величины γ_0; γ_2; f; F, если можно так выразиться, „универсальны“, то есть одинаковы, каким бы типом интегралов (24) мы ни интересовались, то есть о какой бы проэкции возмущающей силы речь ни шла; между тем величины M; N; P индивидуальны, то есть для каждого типа интегралов различны, а поэтому различны и λ; S; R, а следовательно различны и Γ'; Γ''; λ.

Чтобы выяснить астрономическую структуру величин γ_0; γ_2; f; F, вспомним, что, как сказано в начале настоящей работы,

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{2rr'}{aa'}\,\alpha H\,,$$

при чем

$$H = A\cos f\cos f' - C\sin f\cos f' + B\cos f\sin f' + D\sin f\sin f',$$

где

$$A = k\cos(\Pi - K);\; C = k\sin(\Pi - K);\; B = k_1\sin(\Pi - K_1);$$

$$D = k_1\cos(\Pi - K_1);$$

тогда

$$H = k\cos f'\cos(\Pi - K + f) + k_1\sin f'\sin(\Pi - K_1 + f)$$

и

$$\frac{r'}{a'}H = k\cos(\Pi - K + f).(\cos\varepsilon' - e') + k_1\cos\varphi'\sin\varepsilon'\sin(\Pi - K_1 + f)\,,$$

так что

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^2(1 - e'\cos\varepsilon')^2 - 2\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi - K + f)(\cos\varepsilon' - e') +$$

$$- 2\alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin\varepsilon'\sin(\Pi - K_1 + f).$$

Сличая это с типовым выражением

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - 2f\cos(F - \varepsilon') + \gamma_2\cos^2\varepsilon'\,,$$

умозаключаем, что

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_0 &= \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \alpha^2 + 2\alpha.e'\frac{r}{a}k\cos(\Pi - K + f)\\
f\cos F &= \alpha^2 e' + \alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi - K + f)\\
f\sin F &= \alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi - K_1 + f)\\
\gamma_2 &= \alpha^2 e'^2
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Следуя обозначениям Hansen'a (Auseinandersetzung einer Zweckmässiger Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten), имеем для возмущающей силы на 3 направления Hansen'a (без множителя m'—массы возмущаемой планеты) такие выражения

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^3 ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{rr'}{a^2}H - \left(\frac{r}{a}\right)^2;\quad \left(\frac{\Delta}{a}\right)^3\alpha\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\frac{rr'}{a^2}H';$$

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^3 ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\frac{rr'}{a^2}\sin J.\sin(f' + \Pi')\qquad(26),$$

где

$$H' = +k\cos f'\sin(\Pi - K + f) - k_1\sin f'\cos(\Pi - K_1 + f)\qquad(27)$$

Согласно только что сделанного вычисления

$$\frac{rr'}{a^2}H-\left(\frac{r}{a}\right)^3=-\left(\frac{r}{a}\right)^2+k\alpha.\frac{r}{a}\cos(\Pi-K+f)\ (\cos\varepsilon'-e')+$$

$$+k_1\alpha\frac{r}{a}\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f)\sin\varepsilon.$$

Так как нам сейчас предстоит выяснить интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}dg';\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a\frac{\partial\Omega}{\partial v}dg'$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}dg',$$

при чем типичный интеграл такого рода был в начале этой работы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3(M\cos\varepsilon'+N\sin\varepsilon'+P)\,dg',$$

то ясно, что в первом из наших трех случаев

$$\left.\begin{aligned}M=k\alpha\frac{r}{a}\cos(\Pi-K+f);\ N=k_1\alpha.\frac{r}{a}\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f);\\ P=-\left(\frac{r}{a}\right)^2-ke'\alpha\frac{r}{a}\cos(\Pi-K+f)\end{aligned}\right\}\quad(I)$$

Увязывая эти три величины с величинами (25) по формулам (23),

$$\lambda=-\left(\frac{r}{a}\right)^2;\ R=f\sin F.e'\left[N\alpha^2e'-N\alpha^2e'-N\alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\right.$$

$$\left.+M\alpha.\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'.\sin(\Pi-K_1+f)\right]$$

имеем для всех случаев, а в нашем случае $R=0$.

Нахождение S для данного случая пока отложим; из дальнейших соображений оно получится очень просто.

Переходим ко 2-му случаю. Здесь

$$-\frac{rr'}{a^2}H=-\frac{r}{a}\alpha\frac{r'}{a'}H=+\alpha\frac{r}{a}\left[k_1\cos\varphi'\cos(\Pi-K_1+f)\sin\varepsilon'+\right.$$

$$\left.-k\sin(\Pi-K+f)\ (\cos\varepsilon'-e')\right].$$

Непосредственно видно, что здесь

$$M=-\alpha\frac{r}{a}k\sin(\Pi-K+f);\quad N=+\alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\cos(\Pi-K_1+f);$$

$$P=+\alpha.\frac{r}{a}ke'\sin(\Pi-K+f);$$

увязывая эти величины с (25) при помощи (23), замечаем, что теперь

$$\lambda=0; R=-f\sin F.e'\left\{\alpha\frac{r}{a}k\sin(\Pi-K+f).\alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f)+\right.$$

$$\left.+\alpha.\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\cos(\Pi-K_1+f).\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\right\}=$$

$$=-e'\alpha.\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f).\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2kk_1\cos\varphi'\times$$

$$\times\{\sin(\Pi-K+f)\sin(\Pi-K_1+f)+\cos(\Pi-K+f)\cos(\Pi-K_1+f)\}=$$

$$=-e'f\sin F.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\varphi'.kk_1\cos(K_1-K);$$

вспоминая, что $k\cos K=\cos\Pi'$; $k\sin K=\cos J.\sin\Pi'$; $k_1\cos K_1=$ $=\cos J.\cos\Pi'$; $k_1\sin K_1=\sin\Pi'$, сразу умозаключаем, что

$$kk_1\cos(K_1-K)=\cos J.\cos^2\Pi'+\cos J.\sin^2\Pi'=\cos J,$$

а поэтому в настоящем втором случае

$$R=-e'f\sin F.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\varphi'\cos J.$$

Обращаемся к S:
так как в настоящем случае $\lambda=0$, т. е. $P=-Me'$, то общее выражение

$$S=P\gamma_2-Me'\gamma_0+(M-e'P)f\cos F+Nf\sin F$$

можно записать так:

$$\lambda\gamma_2-Me'\gamma_2-Me'\gamma_0+Mf\cos F-e'\lambda f\cos F+Me'^2f\cos F+Nf\sin F$$

во всех случаях; в данном случае, так как $\lambda-0$, то

$$S=-\alpha.\frac{r}{a}k.\sin(\Pi-K+f).\left[-\alpha^2.e'^3-e'\left(\frac{r}{a}\right)^2-e'\alpha^2+\right.$$

$$-2\alpha.e'^2.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\alpha^2e'+\alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\alpha^2e'^3+$$

$$\left.+e'^2\alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\right]+\alpha.\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'.\cos(\Pi-K_1+f)\times$$

$$\times\alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f)=e'\alpha.k\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin(\Pi-K+f)+$$

$$-\alpha.\frac{r}{a}.k.\sin(\Pi-K+f).\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\cos^2\varphi'+\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\times$$

$$\times k_1^2\cos^2\varphi'\cos(\Pi-K_1+f)\sin(\Pi-K_1+f)=e'\alpha.k\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin(\Pi-K+f)+$$

$$+\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\left\{\frac{k_1^2}{2}\sin(2\Pi+2f-2K_1)-\frac{k^2}{2}\sin(2\Pi+2f-2K)\right\}$$

Выражение в последних фигурных скобках (без делителя двойки) можно уяснить себе так: оно равно

$\sin(2\Pi+2f)[k_1^2\cos 2K_1-k^2\cos 2K]-\cos(2\Pi+2f)[k_1^2\sin 2K_1-k^2\sin 2K]$;
но $k_1^2\sin 2K_1-k^2\sin 2K=2\cos J.\sin\Pi'\cos\Pi'-2\cos J.\sin\Pi'\cos\Pi'=0$,
а $k_1^2\cos 2K_1-k^2\cos 2K=\cos^2 J.\cos^2\Pi'-\sin^2\Pi'-(\cos^2\Pi'-\cos^2 J\times$ $\times\sin^2\Pi')=\cos^2 J-1=-\sin^2 J$, так что в этом случае

$$S=+e'\alpha.k\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin(\Pi-K+f)-\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2.\cos^2\varphi'\sin^2 J.\sin 2(\Pi+f).$$

Таким образом, второй случай можно считать оконченным.

Вернемся к вычислению S в первом случае; только что высказанные соображения показывают, что общее выражение S слагается из двух частей: 1) Первая часть есть выражение, взятое из формулы

$$S=P\gamma_2-Me'\gamma_0+(M-e'P)f\cos F+Nf\sin F$$

в предположении $P=-Me'$, т. е. первая часть равна

$$M(-e'\gamma_2-e'\gamma_0+f\cos F+e'^2 f\cos F)+Nf\sin F,$$

2) а вторая есть $\lambda(\gamma_2-e'f\cos F)$.

В рассмотренном первом случае $\lambda=-\left(\frac{r}{a}\right)^2$, так что вторая придаточная часть равна $-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[\alpha^2 e'^2-\alpha^2 e'^2-\alpha.e'\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\right]=$ $=e'M.\left(\frac{r}{a}\right)^2$, ибо в этом первом случае $M=k\alpha.\frac{r}{a}\cos(\Pi-K+f)$.

Первая же часть при значениях (I) обращается в

$$M\left(-\alpha^2 e'^3-e'\left(\frac{r}{a}\right)^2-\alpha^2 e'-2\alpha e'^2\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\alpha^2 e'+\right.$$
$$\left.+\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\alpha^2 e'^3+e'^2\alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\right]+$$
$$+k_1\alpha\frac{r}{a}\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f)\alpha\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f).$$

При слиянии первой части со второй член $Me'\left(\frac{r}{a}\right)^2$ пропадет и после приведения подобных членов окажется

$$S=k\alpha.\frac{r}{a}\cos(\Pi-K+f).\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\cos^2\varphi'+$$
$$+k_1^2\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\sin^2(\Pi-K_1+f)=\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\times$$
$$\times\left\{k^2\cos^2(\Pi-K+f)+k_1^2\sin^2(\Pi-K_1+f)\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках сделаем так: оно равно

$$\frac{1}{2}(k^2+k_1^2)+\frac{1}{2}\cdot\left\{k^2\cos(2\Pi+2f-2K)-k_1^2\cos(2\Pi+2f-2K_1)\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\cos(2\Pi+2f)[k^2\cos 2K-k_1^2\cos 2K_1]+\frac{1}{2}\sin(2\Pi+2f)[k^2\sin 2K+$$
$$-k_1^2\sin 2K_1]=\frac{1}{2}\cos(2\Pi+2f)\sin^2 J.$$

Следовательно, выражение в фигурных скобках есть

$$\frac{1}{2}(1+\cos^2 J)+\frac{1}{2}\cos(2\Pi+2f)\sin^2 J=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 J.2\sin^2(\Pi+f)=1-\sin^2 J.\sin^2(\Pi+f),$$

так что окончательно

$$S=\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\,[1-\sin^2 J\sin^2(\Pi+f)].$$

Переходим к третьему случаю.
Здесь

$$-\frac{rr'}{a^2}\sin J.\sin(f'+\Pi')=-\sin J\frac{r}{a}\alpha.\frac{r'}{a'}[\sin f'\cos\Pi'+\cos f'\sin\Pi']=$$

$$=-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\left\{\cos\Pi'\cos\varphi'\sin\varepsilon'+\sin\Pi'(\cos\varepsilon'-e')\right\},\text{ так что}$$

$$M=-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\sin\Pi';\quad N=-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\cos\Pi'\cos\varphi';$$

$$P=+\sin J.\frac{r}{a}\alpha e'\sin\Pi'.$$

Ясно, что $\lambda=0$, так что

$$S=-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\sin\Pi'\Big[-\alpha^2 e'^3-e'\left(\frac{r}{a}\right)^2+$$

$$-\alpha^2 e'-2\alpha e'^2\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+\alpha^2 e'+\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+$$

$$+\alpha^2 e'^3+\alpha e'^2\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\Big]-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\cos\Pi'\cos\varphi'\times$$

$$\times\alpha.\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi-K_1+f)=e'\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin J.\sin\Pi'+$$

$$+\alpha.\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\cos^2\varphi'.\left(-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\sin\Pi'\right)+$$

$$-\sin J.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi' k_1\cos\Pi'\sin(\Pi-K_1+f)=e'\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin J.\sin\Pi'-$$

$$-\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin J.\cos^2\varphi'\left\{k\sin\Pi'\cos(\Pi-K+f)+k_1\cos\Pi'\sin(\Pi-K_1+f)\right\}$$

Выражение в фигурных скобках равно

$$\sin\Pi'\cos(\Pi+f)\cos\Pi'+\sin\Pi'\sin(\Pi+f)\cos J.\sin\Pi'+$$
$$+\cos\Pi'\sin(\Pi+f)\cos J.\cos\Pi'-\cos\Pi'\cos(\Pi+f)\sin\Pi'=$$
$$=\sin(\Pi+f)\cos J,$$

так что

$$S=e'\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin J.\sin\Pi'-\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin J.\cos^2\varphi'\cos J.\sin(\Pi+f).$$

Наконец

$$R = f\sin F.\Big[-\sin J.\frac{r}{a}\alpha\cos\Pi'\cos\varphi'\alpha^2 e'^2 + e'\sin J\frac{r}{a}\alpha\cos\Pi'\cos\varphi'\times$$

$$\times\Big\{\alpha^2 e' + \alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi - K + f)\Big\} - e'\sin J\frac{r}{a}\alpha\sin\Pi'.\alpha\times$$

$$\times\frac{r}{a}k_1\cos\varphi'\sin(\Pi - K_1 + f)\Big] = f\sin F.e'\sin J.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\varphi'\times$$

$$\times[k\cos\Pi'\cos(\Pi - K + f) - k_1\sin\Pi'\sin(\Pi - K_1 + f)].$$

Но выражение в последних прямых скобках равно

$$\cos\Pi'\cos(\Pi + f)\cos\Pi' + \cos\Pi'\sin(\Pi + f)\cos J.\sin\Pi' +$$
$$-\sin\Pi'\sin(\Pi + f).\cos J.\cos\Pi' + \sin\Pi'\cos(\Pi + f)\sin\Pi' = \cos(\Pi + f)$$

а поэтому

$$R = e'\cos\varphi'.\sin J.f\sin F.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos(\Pi + f).$$

Таким образом, резюме наших вычислений можно предоставить в следующей таблице:

$$a\frac{\partial\Omega}{\partial v};$$

$\lambda = 0.$

$$S = -\frac{1}{2}\sin^2 J.\cos^2\varphi'\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin(2\Pi + 2f) +$$

$$+ e'k\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin(\Pi - K + f);$$

$$R = -e'\cos\varphi'.\cos J.\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2 f\sin F;$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r};$$

$$\lambda = -\left(\frac{r}{a}\right)^2;\quad S = \alpha^2\cos^2\varphi'\left(\frac{r}{a}\right)^2[1 - \sin^2 J.\sin^2(\Pi + f)];\qquad (28)$$

$$R = 0.$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}:$$

$\lambda = 0$

$$S = -\sin J.\cos J.\alpha^2\cos^2\varphi'.\left(\frac{r}{a}\right)^2.\sin(\Pi + f) + \alpha.e'\times$$

$$\times\left(\frac{r}{a}\right)^3.\sin J.\sin\Pi';$$

$$R = e'\cos\varphi'.\sin J.f\sin F.\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos(\Pi + f).$$

Теперь на очереди получение удобных формул для вычисления указанных трех интегралов.

Callandreau делает к этому интересный подход: возьмем старое выражение

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \gamma_0 - 2f\cos(F - \varepsilon') + \gamma_2\cos^2\varepsilon'$$

и будем временно его мыслить в виде

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = h - 2f\cos(F - \varepsilon') + i\cos 2\varepsilon';$$

так что

$$h = \gamma_0 + \frac{\gamma_2}{2}; \quad i = \frac{\gamma_2}{2}.$$

Покажем, что задача разложить это последнее выражение на 2 множителя типа

$$C\,[1 + a^2 - 2a\cos(\varepsilon' - \omega)]\,[1 + b^2 - 2b\cos(\varepsilon' + \omega)]$$

сводится к решению уравнения 3-й степени.

Из сличения видно, что

$$\left.\begin{aligned} h &= C\,[(1 + a^2)(1 + b^2) + 2ab\cos 2\omega]; \quad i = C.2ab; \\ f\cos F &= C\,[a(1 + b^2) + b(1 + a^2)]\cos\omega \\ f\sin F &= C\,[a(1 + b^2) - b(1 + a^2)]\sin\omega \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Отсюда сразу умозаключаем, что

$$f^2\cos 2F = C^2\,[a^2(1 + b^2)^2\cos 2\omega + b^2(1 + a^2)^2\cos 2\omega + \\ + 2ab(1 + a^2)(1 + b^2)]$$

$$f^2 = C^2\,[a^2(1 + b^2)^2 + b^2(1 + a^2)^2 + 2ab(1 + a^2)(1 + b^2)\cos 2\omega].$$

Отсюда видно, что

$$\frac{h}{i} - \frac{f^2}{i^2}\cos 2F = \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{2ab} + \cos 2\omega +$$

$$-\left[\frac{a^2(1 + b^2)^2 + b^2(1 + a^2)^2}{4a^2b^2}\cos 2\omega + \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{2ab}\right] =$$

$$= \left[1 - \frac{a^2(1 + b^2)^2 + b^2(1 + a^2)^2}{4a^2b^2}\right]\cos 2\omega =$$

$$= \frac{\cos 2\omega}{4a^2b^2}\left\{-a^2 - 2a^2b^2 - a^2b^4 - b^2 - 2a^2b^2 - a^4b^2 + 4a^2b^2\right\} =$$

$$= -\frac{\cos 2\omega}{4}\left(\frac{1}{b^2} + b^2 + \frac{1}{a^2} + a^2\right) = -\frac{\cos 2\omega}{4}\left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right);$$

$$\frac{f^2}{i^2} - 1 = \frac{a^2(1 + b^2)^2 + b^2(1 + a^2)^2}{4a^2b^2} + \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{2ab}\cos 2\omega - 1 =$$

$$= \frac{a^2 + a^2b^4 + b^2 + b^2a^4}{4a^2b^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + ab\right)\cos 2\omega =$$

$$= \frac{1}{4}\left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\cos 2\omega$$

и наконец

$$\frac{h}{i} = \cos 2\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + ab\right).$$

Если теперь положить, как сделал Puiseux (Annales de l'observatoire de Paris, t. VII)

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(ab + \frac{1}{ab}\right); \quad y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right); \quad y_3 = \cos 2\omega,$$

то видно, что

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{h}{i}; \quad y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = \frac{f^2}{i^2} - 1;$$

$$-y_1 y_2 y_3 = \frac{h}{i} - \frac{f^2}{i^2} \cos 2F;$$

так что y_1; y_2; y_3 суть корни уравнения 3-ей степени

$$y^3 - \frac{h}{i} y^2 + \left(\frac{f^2}{i^2} - 1\right) y + \left(\frac{h}{i} - \frac{f^2}{i^2} \cos 2F\right) = 0 \tag{30}$$

Сейчас же полезно установить зависимость между корнями этого кубического уравнения и ур. (15'); покажем именно, что $x = i(y-1) =$

$$= \frac{\gamma_2}{2}(y-1);$$

отсюда

$$y = 1 + \frac{x}{i}$$

Подставим это значение в (30); тогда

$$\frac{x^3}{i^3} + 3\frac{x^2}{i^2} + 3\frac{x}{i} + 1 - \frac{h}{i}\left(1 + \frac{2x}{i} + \frac{x^2}{i^2}\right) + \left(\frac{f^2}{i^2} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{i}\right) +$$

$$+ \frac{h}{i} - \frac{f^2}{i^2} \cos 2F = 0,$$

или

$$\frac{x^3}{i^3} + \frac{3i - h}{i^3} x^2 + \frac{3i^2 - 2hi + f^2 - i^2}{i^3} x + 1 - \frac{h}{i} + \frac{f^2}{i^2} - 1 + \frac{h}{i} +$$

$$- \frac{f^2}{i^2} \cos 2F = 0,$$

или

$$x^3 + (\gamma_2 - \gamma_0) x^2 + (f^2 - \gamma_0 \gamma_2) x + f^2 \gamma_2 \sin^2 F = 0,$$

а это как раз уравнение (15').

Так как корни уравнения (15') вещественны, то вещественны и корни уравнения (30), а следовательно это уравнение (30) может быть выгодно решено известным тригонометрическим путем: изгоняем квадратный член подстановкой

$$y = \frac{h}{3i} + z, \tag{31}$$

после чего получается приведенное кубическое уравнение

$$z^3 - P'z - Q' = 0, \tag{30'}$$

где

$$P' = \frac{h^2}{3i^2} - \frac{f^2}{i^2} + 1; \quad Q' = \frac{h}{3i}\left(\frac{2}{9}\frac{h^2}{i^2} - \frac{f^2}{i^2} - 2\right) + \frac{f^2}{i^2} \cos 2F \tag{32}$$

В уравнении (30′), как обычно делается, положим

$$z = R' z';$$

тогда

$$z'^3 - \frac{P'}{R'^2} z' - \frac{Q'}{R'^3} = 0$$

или

$$\frac{P'}{R'^2} z' - z'^3 = -\frac{Q'}{R'^3}.$$

Потребуем условие

$$P' : R'^2 = \frac{3}{4},$$

чтобы левую часть привести к формуле синуса тройного угла; тогда

$$R' = 2\sqrt{\frac{P'}{3}}$$

и получится

$$3z' - 4z'^3 = -\frac{4Q'}{R'^3}.$$

Если теперь положить

$$-4Q' : R'^3 = \sin\theta, \tag{33}$$

то окажется

$$z' = \sin\frac{\theta}{3}; \quad \sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right); \quad -\sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \ldots (-90^\circ < \theta < +90^\circ)$$

таким образом

$$y_1 = \frac{h}{3i} + R' \sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)$$

$$y_2 = \frac{h}{3i} + R' \sin\frac{\theta}{3}$$

$$y_3 = \frac{h}{3i} - R' \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right).$$

После этого можно подойти к удобному виду величин

$$G = i(y_1 - 1) = \frac{h}{3} - i + R'i \sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right) = \frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2) +$$

$$+ R' i \sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)$$

$$G' = i(y_2 - 1) = \frac{h}{3} - i + R'i \sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2) + R' i \sin\frac{\theta}{3}$$

$$G'' = -i(y_3 - 1) = -\frac{h}{3} + i + R' i \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) = -\frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2) +$$

$$+ R' i \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right).$$

Составим выражение $R'i$:

$$R'i = \frac{\gamma_2}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{P'}{3}} = \gamma_2\sqrt{\frac{P'}{3}} = \gamma_2\sqrt{\frac{h^2}{9i^2} - \frac{f^2}{3i^2} + \frac{1}{3}};$$

но

$$\frac{h^2}{9i^2} - \frac{f^2}{3i^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{2\gamma_0}{\gamma_2}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{4f^2}{\gamma_2^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\frac{\gamma_0}{\gamma_2} +$$

$$+ \frac{4}{9}\frac{\gamma_0^2}{\gamma_2^2} - \frac{4}{3}\frac{f^2}{\gamma_2^2} = \frac{4}{\gamma_2^2}\left\{\frac{1}{9}\gamma_2^2 + \frac{1}{9}\gamma_0\gamma_2 + \frac{1}{9}\gamma_0^2 - \frac{1}{3}f^2\right\} =$$

$$= \frac{4}{\gamma_2^2}\left\{\frac{1}{9}(\gamma_0 - \gamma_2)^2 - \frac{1}{3}(f^2 - \gamma_0\gamma_2)\right\};$$

если обозначить

$$p = \frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2);\ q^2 = p^2 - \frac{1}{3}(f^2 - \gamma_0\gamma_2),$$

то

$$\frac{h^2}{9i^2} - \frac{f^2}{3i^2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{\gamma_2^2}\left\{p^2 - \frac{1}{3}(f^2 - \gamma_0\gamma_2)\right\} = \frac{4}{\gamma_2^2}q^2;$$

отсюда

$$R'i = \gamma_2\frac{2}{\gamma_2}q = 2q,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} G &= p + 2q\sin\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right) \\ G' &= p + 2q\sin\frac{\theta}{3}. \\ G' &= -p + 2q\sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Остается дать более или менее удобное выражение для

$$\sin\theta = -\frac{4Q'}{R'^3};$$

из того, что

$$R' = \frac{2q}{i} = \frac{4q}{\gamma_2},$$

следует

$$\sin\theta = -4Q'\gamma_2^3 : 64q^3 = -\frac{1}{16}\frac{\gamma_2^3}{q^3}Q' = -\frac{1}{2q^3}i^3Q;$$

но

$$Q' = \frac{h}{3i}\left(\frac{2}{9}\frac{h^2}{i^2} - \frac{f^2}{i^2} - 2\right) + \frac{f^2}{i^2}\cos 2F;$$

Следовательно, вспоминая, что

$$h=\gamma_0+\frac{\gamma_2}{2};\; i=\frac{\gamma_2}{2} \text{ и } \frac{1}{3}h-i=\frac{1}{3}\gamma_0-\frac{1}{3}\gamma_2=p,$$

$$Q'i^3=\frac{2}{27}h^3-\frac{1}{3}hf^2-\frac{2}{3}hi^2+f^2 i\cos 2F=\frac{2}{27}h^3+$$

$$-\frac{1}{3}hf^2-\frac{2}{3}hi^2+f^2 i-\gamma_2 f^2\sin^2 F=\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{9}h^2-i^2\right)+$$

$$-f^2\left(\frac{1}{3}h-i\right)-\gamma_2 f^2\sin^2 F=p\left[\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{3}h+i\right)-f^2\right]-\gamma_2 f^2\sin^2 F.$$

Покажем, что

$$\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{3}h+i\right)-f^2=3q^2-p^2;$$

в самом деле

$$3q^2-p^2=2p^2-f^2+\gamma_0\gamma_2;\quad 2p^2+\gamma_0\gamma_2=\frac{2}{9}\gamma_0^2-\frac{4}{9}\gamma_0\gamma_2+$$

$$+\frac{2}{9}\gamma_2^2+\gamma_0\gamma_2,$$

а

$$\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{3}h+i\right)=\frac{2}{9}\gamma_0^2+\frac{2}{9}\gamma_0\gamma_2+\frac{1}{18}\gamma_2^2+\frac{1}{3}\gamma_0\gamma_2+\frac{1}{6}\gamma_2^2=$$

$$=\frac{2}{9}\gamma_0^2+\frac{2}{9}\gamma_2^2+\frac{5}{9}\gamma_0\gamma_2.$$

Следовательно

$$\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{3}h+i\right)=2p^2+\gamma_0\gamma_2,$$

так что действительно

$$3q^2-p^2=\frac{2}{3}h\left(\frac{1}{3}h+i\right)-f^2;$$

окончательно имеем

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{1}{3}(\gamma_0-\gamma_2)\\ q^2&=p^2-\frac{1}{3}(f^2-\gamma_0\gamma_2)\\ \sin\theta&=[p(p^2-3q^2)+\gamma_2 f^2\sin^2 F]:2q^3\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

Из (34) имеем

$$G+G''=2\sqrt{3}\,q\cos\frac{\theta}{3}$$

$$G'+G''=2\sqrt{3}\,q\cos\left(60^\circ-\frac{\theta}{3}\right)$$

$$G-G'=2\sqrt{3}\,q\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)$$

Вспоминая теперь, что—Γ'есть числитель простейшей дроби для

$$\frac{\lambda x^2 + Sx + R}{(x - G)\ (x - G')\ (x + G'')}$$

со знаменателем $x - G'$, имеем по правилу Sturm'a

$$\Gamma' = \frac{\lambda G'^2 + SG' + R}{(G - G')\ (G' + G'')} =$$

$$= \frac{\lambda \left[p^2 + 4pq \sin\frac{\theta}{3} + 4q^2 \sin^2\frac{\theta}{3}\right] + Sp + 2qS \sin\frac{\theta}{3} + R}{12q^2 \cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} =$$

$$= \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2) + 2(S + 2\lambda p)\, q \sin\frac{\theta}{3}}{12q^2 \cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} +$$

$$+ \frac{\lambda\left(4\sin^2\frac{\theta}{3} - 1\right)}{12\cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} \quad \left[= \frac{\lambda\left(4\sin^2\frac{\theta}{3} - 1\right)}{3 - 12\sin^2\frac{\theta}{3}}\right]$$

так что последний член равен $-\frac{1}{3}\lambda$.

Поэтому

$$\Gamma' = \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2) + 2(S + 2\lambda p)\, q \sin\frac{\theta}{3}}{12q^2 \cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} - \frac{1}{3}\lambda \qquad (36)$$

Аналогично

$$-\Gamma'' = \frac{\lambda G''^2 - SG'' + R}{(G + G'')\ (G' + G'')} =$$

$$= \frac{\lambda\left[4q^2 \sin^2\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) - 4pq \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) + p^2\right] +}{12q^2 \cos\frac{\theta}{3} \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)}$$

$$\frac{+ pS - 2qS \cdot \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) + R}{12q^2 \cos\frac{\theta}{3} \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} =$$

$$= \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2) - 2(S + 2\lambda p)\, q \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)}{12q^2 \cos\frac{\theta}{3} \cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} +$$

$$+ \lambda . \frac{4\sin^2\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) - 1}{12\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)},$$

но

$$2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right) = \cos 60^\circ + \cos\left(60^\circ - \frac{2\theta}{3}\right) = \frac{1}{2} - 1 +$$

$$+ 2\sin^2\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right).$$

Следовательно, последний член равен $+\frac{1}{3}\lambda$, так что

$$-\Gamma'' = \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2) - 2(S + 2\lambda p)\, q \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)}{12q^2 \cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} + \frac{1}{3}\lambda \quad (37)$$

Из равенств (36) и (37) умозаключаем, что

$$2\Gamma' + \Gamma'' + \lambda = \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2)}{6q^2\cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} +$$

$$+ \frac{4.(S + 2\lambda p)\, q \sin\frac{\theta}{3}}{12q^2\cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} +$$

$$- \frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2)}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)} + \frac{2(S + 2\lambda p)\, q \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)}.$$

Здесь коэфициент при

$$\frac{R + Sp + \lambda(p^2 + q^2)}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)}.$$

равен

$$2\cos\frac{\theta}{3} - \cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) = \cos\frac{\theta}{3} + \sin\left(30^\circ + \frac{\theta}{3}\right) =$$

$$= 2\cos 30^\circ . \cos\left(30^\circ - \frac{\theta}{3}\right) = \sqrt{3} . \sin\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right),$$

а коэфициент при

$$\frac{(S+2\lambda p)\,q}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ-\frac{\theta}{3}\right)}$$

равен

$$4\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}+2\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)=2\sin\frac{2\theta}{3}+$$

$$+\sin\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)=\sin\frac{2\theta}{3}+\cos\left(30^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)=2\cos 30^\circ.\cos\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{3}.\cos\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right),$$

так что

$$2\Gamma'+\Gamma''+\lambda=A\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)+B\cos\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right), \qquad (38)$$

где

$$A=\frac{R+Sp+\lambda(p^2+q^2)}{4\sqrt{3}\,q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)},$$

$$B=\frac{(S+2\lambda p)\,q}{4\sqrt{3}\,q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)} \qquad (39)$$

Так же обработаем выражение $\Gamma'+2\Gamma''+\lambda$; оно равно

$$\frac{R+Sp+\lambda(p^2+q^2)}{12q^2\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)}+\frac{2(S+2\lambda p)\,q\sin\frac{\theta}{3}}{12q^2\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)}+$$

$$-\frac{R+Sp+\lambda(p^2+q^2)}{6q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)}+\frac{4(S+2\lambda p)\,q\sin\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)},$$

Здесь коэфициент при

$$\frac{R+Sp+\lambda(p^2+q^2)}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)}$$

равен

$$\cos\frac{\theta}{3}-2\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)=\cos\frac{\theta}{3}-2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{3}\right)=$$

$$=\sqrt{3}.\sin\frac{\theta}{3},$$

а коэфициент при

$$\frac{(S+2\lambda p)q}{12q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)}$$

равен

$$2\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}+4\sin\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)=2\sin\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)+$$

$$+\sin\frac{2\theta}{3}=\sin\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)+2\sin 30^\circ\cos\left(30^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)=$$

$$=\sin\left(60^0-\frac{2\theta}{3}\right)+\sin\left(60^0+\frac{2\theta}{3}\right)=2\sin 60^0.\cos\frac{2\theta}{3}=\sqrt{3}.\cos\frac{2\theta}{3},$$

так что

$$\Gamma'+2\Gamma''+\lambda=A\sin\frac{\theta}{3}+B.\cos\frac{2\theta}{3} \tag{40}$$

при чем A и B—те же, что и в (39).

Сделаем еще обозначения

$$m^2=\cos\frac{\theta}{3};\quad n^2=\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right) \tag{41}$$

Теперь на очереди приведение интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 T\,dT}{[(G-G')\sin^2 T+(G+G')\cos^2 T]^{3/2}}$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 T\,dT}{[(G-G')\sin^2 T+(G+G'')\cos^2 T]^{3/2}}$$

к полным эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Это может быть достигнуто, например, так: прежде всего непосредственным диференцированием можно убедиться, что

$$\frac{d}{dT}\left\{\frac{\sin T\cos T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{1-2\sin^2 T+c^2\sin^4 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}},$$

так что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin^2 T+c^2\sin^4 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}dT=0,$$

или сразу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 T-c^2\sin^4 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}dT=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{1/2}}.$$

Если тождество

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 T + c^2\sin^4 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}\,dT = 0,$$

умножим на c^2, то можно написать

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-1+c^2-2c^2\sin^2 T + c^4\sin^4 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}\,dT = 0$$

или

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}\,dT = (1-c^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}}$$

или

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{1-c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}\,dT,$$

так что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}\,dT +$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1-c^2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}\,dT + \right.$$

$$\left. -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T - c^2\sin^2 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}\,dT \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-c^2\sin^2 T - \sin^2 T + c^2\sin^2 T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}\,dT =$$

$$= \frac{1}{1-c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T\,dT}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}$$

Полученные формулы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T\,d\,T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T\,d\,T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T\,d\,T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T\,d\,T}{(1-c^2\sin^2 T)^{\frac{1}{2}}}$$

легко применяются к нашему случаю, полагая

$$C^2 = (G' + G'') : (G + G'')$$

и дают сразу

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 T\,d\,T}{[(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{G+G''}\times \\
&\quad\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 T\,d\,T}{[(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T]^{\frac{1}{2}}} \\
&\text{и} \\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 T.d\,T}{[(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{G-G'}\times \\
&\quad\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 T\,d\,T}{[(C+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Пусть еще

$$m^2 = s^2(1+\alpha)^2\,; \qquad n^2 = s^2(1-\alpha)^2$$

а также

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+2\alpha\cos 2T}} = \frac{1}{2}\,b_0 - \alpha\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)\cos 2T + , \;\ldots.$$

где

$$\frac{1}{2}\,b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,T}{\sqrt{1+\alpha^2+2\alpha\cos 2T}}\,;$$

$$-\alpha\left(\frac{b_1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\,T\,d\,T}{\sqrt{1+\alpha^2+2\alpha\cos 2T}}\,;$$

тогда

$G+G''=2\sqrt{3}.q.s^2(1+\alpha)^2\,;\quad G-G'=2\sqrt{3}.q.s^2(1-\alpha)^2$, так что

$$(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T = 2\sqrt{3}.q.s^2\left\{(1+\alpha)^2\cos^2 T+\right.$$
$$\left.+(1-\alpha)^2\sin^2 T\right\} = 2\sqrt{3}.q.s^2\left\{1+2\alpha\cos 2T+\alpha^2\right\}$$

поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 T\,d\,T}{\left[(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}.q.s^2(1+\alpha)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2T}{\sqrt[4]{12}\,q^{\frac{1}{2}}\,s\sqrt{1+2\alpha\cos 2T+\alpha^2}}\,dT=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.q^{\frac{3}{2}}.\mathrm{s}.m^2}\left[b_0+\alpha.\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)\right]$$

и аналогично

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2 T\,dT}{\left[(G+G'')\cos^2 T+(G-G')\sin^2 T\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}.q.n^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2T\right)}{\sqrt[4]{12}.q^{\frac{3}{2}}.s\sqrt{1+2\alpha\cos T+\alpha^2}}\,dT=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}q^{\frac{3}{2}}.s.n^2}\left[b_0-\alpha.\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)\right].$$

Подставив в (24) недавно найденные выражения $2\Gamma'+\Gamma''+\lambda$ и $\Gamma'+2\Gamma''+\lambda$, а также только что найденные два интеграла, получим интеграл (24) в виде

$$\left\{A\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)+B\cos\left(60^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)\right\}\frac{1}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.q^{\frac{3}{2}}.s.n^2}(b_0-b_1)+$$

$$+\left\{A\sin\frac{\theta}{3}+B\cos\frac{2\theta}{3}\right\}\frac{1}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.q^{\frac{3}{2}}.s.m^2}(b_0+b_1)$$

и учтем (39); тогда можно подсчитать, что коэфициент при

$$\frac{R+Sp+\lambda(p^2+q^2)}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.q^{\frac{3}{2}}.s.4\sqrt{3}.q^2\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ-\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)}$$

или при

$$\frac{A}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.s.q^{\frac{3}{2}}}$$

будет

$$\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)\frac{b_0-b_1}{n^2}+\sin\frac{\theta}{3}.\frac{b_0+b_1}{m^2};$$

первая его часть равна

$$\frac{b_0}{m^2 n^2}\left\{\cos\frac{\theta}{3}\sin\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)+\sin\frac{\theta}{3}\cos\left(60^\circ+\frac{\theta}{3}\right)\right\}=$$

$$=\frac{b_0}{m^2 n^2}\sin\left(120^\circ-\frac{2\theta}{3}\right)=\frac{2b_0}{m^2 n^2}\sin\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right),$$

а вторая равна

$$\frac{b_1}{m^2 n^2}\left\{\sin\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)-\cos\frac{\theta}{3}.\sin\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\right\}=$$

$$=\frac{b_1}{m^2 n^2}\sin(-60^0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{b_1}{m^2 n^2},$$

так что коэфициент при $R+Sp+\lambda(p^2+q^2)$ будет равен

$$\frac{1}{96\sqrt[4]{12.q^2 s.m^2 n^2\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right).m^2 n^2}}\left\{2b_0\sin\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1\right\}=$$

$$=\frac{1}{48\sqrt[4]{12.q^2 s.m^4.n^4}}\left\{b_0\cos\left(30^0+\frac{\theta}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{b_1}{\cos\left(60-\frac{\theta}{3}\right)}\right\} \qquad (2)$$

Подобным образом можно подсчитать, что коэфициент при

$$\frac{(S+2\lambda p)q}{4\sqrt{3}.q^2 m^2 n^2\cos\left(60^0-\frac{\theta}{3}\right).8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.q^{3/2}.s},$$

или при

$$\frac{B}{8\sqrt{3}.\sqrt[4]{12}.s.q^{3/2}}$$

будет

$$\cos\left(60^0-\frac{2\theta}{3}\right)\frac{b_0-b_1}{n^2}+\cos\frac{2\theta}{3}.\frac{b_0+b_1}{m^2},$$

одна часть его равна

$$\frac{b_0}{m^2 n^2}\left[\cos\frac{\theta}{3}\cos\left(60^0-\frac{2\theta}{3}\right)+\cos\left(60^0+\frac{\theta}{3}\right)\cos\frac{2\theta}{3}\right]=$$

$$=\frac{b_0}{m^2 n^2}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\cos\frac{\theta}{3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}\right]=\frac{b_0}{m^2 n^2}\left\{\frac{1}{2}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{3}\right\}=\frac{b_0}{m^2 n^2}\left\{\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\left(60^\circ-\frac{\theta}{3}\right)\right\}=$$

$$= \frac{b_0}{m^2 n^2} \cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\cos(180^0 - \theta)}{\cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right)} \right\} =$$

$$= \frac{b_0}{m^2 n^2} \cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) \left\{ 1 - 2\cos^2\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) + \frac{3}{2} \right\} =$$

$$= \frac{b_0}{m^2 n^2} \cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) \left\{ \frac{1}{2} + 2\cos^2\left(30^0 + \frac{\theta}{3}\right) \right\},$$

а другая равна

$$\frac{b_1}{m^2 n^2} \left[\cos\frac{2\theta}{3} \cos\left(60^0 + \frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(60^0 - \frac{2\theta}{3}\right) \cos\frac{\theta}{3} \right] =$$

$$= \frac{b_1}{m^2 n^2} \left[\frac{1}{2} \cos\frac{\theta}{3} \cos\frac{2\theta}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\frac{\theta}{3} \cos\frac{2\theta}{3} - \frac{1}{2} \cos\frac{2\theta}{3} \cos\frac{\theta}{3} + \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\frac{2\theta}{3} \cos\frac{\theta}{3} \right] = - \frac{b_1}{m^2 n^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta,$$

так что коэфициент при $(S + 2\lambda p)\, q$ окажется равным

$$\frac{1}{96 \sqrt[4]{12} . q^{\frac{7}{2}} . m^2 n^2 s . \cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) . m^2 n^2} \left\{ b_0 \cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right) \times \right.$$

$$\left. \times 2 \left[\frac{1}{4} + \cos^2\left(30^0 + \frac{\theta}{3}\right) \right] - \frac{b_1 \sqrt{3}}{4} . 2\sin\theta \right\}$$

или

$$\frac{1}{48 \sqrt[4]{12} . q^{\frac{7}{2}} . s m^4 n^4} \left\{ b_0 \left[\frac{1}{4} + \cos^2\left(30^0 + \frac{\theta}{3}\right) \right] + \right.$$

$$\left. - \frac{b_1 \sqrt{3}}{4} \frac{\sin\theta}{\cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right)} \right\} \qquad (\beta)$$

Функциями только одного θ являются: 1) m и n, ибо формулы (41); 2) s и α_1 ибо $m^2 = s^2 (1 + \alpha)^2$; $n^2 = s^2 (1 - \alpha)^2$ и наконец 3) b_0 и b_1, которые зависят лишь от α.

Если поэтому положить

$$\left.\begin{aligned} \chi(\theta) &= \left[\cos\left(30^0 + \frac{\theta}{3}\right) . b_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{b_1}{\cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right)} \right] : \\ &\qquad : \left(48 \sqrt[4]{12} . s . m^4 n^4\right); \\ \psi(\theta) &= \left\{ \left[\frac{1}{4} + \cos^2\left(30^0 + \frac{\theta}{3}\right) \right] b_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} b_1 \times \right. \\ &\qquad \left. \times \frac{\sin\theta}{\cos\left(60^0 - \frac{\theta}{3}\right)} \right\} : \left(48 \sqrt[4]{12} . s . m^4 n^4\right) \end{aligned}\right\} \qquad (43$$

то типичный для нашей работы интеграл (24) обратится в

$$[R+Sp+\lambda(p^2+q^2)]\,.\,q^{-\frac{7}{2}}.\chi(\theta)+(S+2\lambda p)\,q\,.\,q^{-\frac{7}{2}}\psi(\theta),$$

или, что—то же, в

$$q^{-\frac{7}{2}}\left\{R\chi(\theta)+(S+2\lambda p)\,q\,.\,V+\lambda(q^2-p^2)\chi(\theta)\right\} \qquad (\gamma)$$

полагая

$$V=\frac{p}{q}\chi(\theta)+\psi(\theta).$$

Давая λ; S; R значения по таблице (28), разберем 3 случая, положив еще

$$W=p+q\frac{\psi(\theta)}{\chi(\theta)}=\frac{q}{\chi(\theta)}.V \qquad (44)$$

I. Для $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}a\frac{\partial\Omega}{\partial v}dg'$; здесь $\lambda=0$, а потому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}a\frac{\partial\Omega}{\partial v}dg'=q^{-\frac{7}{2}}\left\{R\chi(\theta)+S.q.V\right\};$$

но в этом случае

$$S=\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\left\{-\frac{1}{2}\sin^2 J\sin 2(\Pi+f)+\frac{tg\,\varphi'}{\cos\varphi'}\frac{k}{\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{r}{a}\sin(\Pi-K+f)\right\}=\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2.\cos^2\varphi'.J_1,$$

полагая

$$J_1=-\frac{1}{2}\sin^2 J.\sin 2(\Pi+f)+\frac{tg\,\varphi'}{\cos\varphi'}\frac{k}{\alpha}.\frac{r}{a}\sin(\Pi-K+f) \qquad (i_1)$$

$$R=\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'.[-tg\,\varphi'.\cos J.f\sin F]=+\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'.F_1,$$

полагая

$$F_1=-tg\,\varphi'\cos J.f\sin F \qquad (k_1)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}a\frac{\partial\Omega}{\partial v}dg'=q^{-\frac{7}{2}}\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\left\{q.V.J_1+\chi(\theta).F_1\right\}=$$

$$=\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'.q^{-\frac{7}{2}}\chi(\theta)\left\{F_1+W.J_1\right\}, \text{ на основании (44)} \qquad (J_1).$$

II. Для $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}dg$; здесь $R=0$; поэтому интеграл равен

$q^{-\frac{7}{2}}\left\{(S+2\lambda p)\,q\,V-\left(\frac{r}{a}\right)^2(q^2-p^2)\chi(\theta)\right\}$, ибо $\lambda=-\left(\frac{r}{a}\right)^2$ в этом случае; надо сделать подготовительные действия;

$$S+2\lambda p=-2\left(\frac{r}{a}\right)^2 p+\alpha^2\cos^2\varphi'\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[1-\sin^2 J.\sin^2(\Pi+f)\right]=$$

$$=\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\left\{1-\sin^2 J.\sin^2(\Pi+f)-\frac{2p}{\alpha^2\cos^2\varphi'}\right\}=$$

$$=\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2.\cos^2\varphi'.J_2.$$

Полагая

$$J_2=1-\sin^2 J.\sin^2(\Pi+f)-\frac{2p}{\alpha^2\cos^2\varphi'} \qquad (i_2);$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2(q^2-p^2)=-\left(\frac{r}{a}\right)^2.\frac{1}{3}(f^2-\gamma_0\gamma_2)=-\left(\frac{r}{a}\right)^2.\alpha^2\cos^2\varphi'\times$$

$$\times\frac{f^2-\gamma_0\gamma_2}{3\alpha^2\cos^2\varphi'}=-\left(\frac{r}{a}\right)^2\alpha^2\cos^2\varphi'.F_2,$$

полагая

$$F_2=\frac{f^2-\gamma_0\gamma_2}{3\alpha^2\cos^2\varphi'} \qquad (k_2)$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\,dg'=q^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\alpha^2\cos^2\varphi'\left\{J_2.q\,V+F_2.Z(0)\right\}=$$

$$=q^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\alpha^2\cos^2\varphi' Z(0)\left\{F_2+J_2W\right\} \qquad (J_2)$$

III. Для $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,dg'$; здесь $\lambda=0$ и интеграл равен

$$q^{-\frac{7}{2}}\left\{RZ(0)+Sq\,V\right\};$$

здесь

$$R=e'\cos\varphi'\sin J.f\sin F\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos(\Pi+f)=\alpha^2\frac{r}{a}\cos^2\varphi'.\sin J.F_3,$$

полагая

$$F_3=tg\varphi'.f\sin F.\cos(\Pi+f).\frac{r}{a} \qquad (k_3)$$

Здесь

$$S=-\sin J.\cos J\cos^2\varphi'\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin(\Pi+f)+e'\alpha\left(\frac{r}{a}\right)^3\sin J.\sin\Pi'=$$

$$=\sin J.\alpha^2.\frac{r}{a}\cos^2\varphi'.J_3,$$

полагая

$$J_3=-\cos J.\frac{r}{a}\sin(\Pi+f)+\frac{tg\varphi'}{\alpha\cos\varphi'}\left(\frac{r}{a}\right)^2\sin\Pi' \qquad (i_3)$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,dg' = q^{-\frac{7}{2}}\alpha^2\frac{r}{a}\cos^2\varphi'.\sin J.\{F_3.\chi(\theta)+J_3.q\,V\} =$$

$$= q^{-\frac{7}{2}}\alpha^2.\frac{r}{a}\cos^2\varphi'\sin\ J\chi(\theta)\{F_3+W.J_3\} \qquad (J_3)$$

В заключение Callandreau дает очень важную контрольную формулу для проверки вычисления трех интегралов по только что приведенным формулам (J); (J_2); (J_3); эта контрольная формула составляется так: из

$$H = \cos(\Pi+f)\cos(\Pi'+f') + \sin(\Pi+f).\sin(\Pi'+f')\cos J$$

$$H' = \sin(\Pi+f)\cos(\Pi'+f') - \cos(\Pi+f)\sin(\Pi'+f')\cos J$$

вытекает соотношение

$$H\sin(\Pi+f) - H'.\cos(\Pi+f) = \sin(\Pi'+f')\cos J \qquad (45)$$

Его то и можно использовать для контрольной формулы, а именно

$$\left.\begin{aligned} &a\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\frac{m'}{1+m}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\frac{rr'}{a^2}H'; \quad ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{1+m}\left[\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\frac{rr'H}{a^2} + \right.\\ &\qquad\qquad\qquad \left. -\left(\frac{r}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\right];\\ &ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\frac{m}{1+m}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\sin J.\frac{rr'}{a^2}\sin(\Pi'+f') \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

[См. Hansen. Anseinandersetzung einer zweckmassigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der Kleinen Planeten. § 30]; в формулах (46) отброшены те члены пертурбационной функции, которые не дают вековых возмущений; без множителя $m' : (1+m)$ эти формулы упоминались в нашем изложении раньше (формулы (26)).

Умножая теперь контрольное равенство (45) на $\dfrac{m'}{1+m}\left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^3\dfrac{rr'}{a^2}$

и пользуясь формулами (46), легко умозаключим, что после интегрирования по орбите возмущающего тела окажется

$$\cos(\Pi+f).\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a\frac{\partial\Omega}{\partial v}\,dg' + \sin(\Pi+f).\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\,dg' =$$

$$= -\sin(\Pi+f)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 dg' - \operatorname{ctg} J.\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,dg' \qquad (47)$$

В этой крайне важной контрольной формуле у Callandreau опечатка, о которой следует предостеречь вычислителей: у первого члена правой части нет знака минус.

Остается дать рабочую формулу для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 dg';$$

в этом случае из сличения с

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 [M\cos\varepsilon'+N\sin\varepsilon'+P]\,dg'$$

прямо видно, что

$$M=0;\quad N=0;\quad P=\left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

так что по формулам (23)

$$\lambda=\left(\frac{r}{a}\right)^2;\ R=0;\quad S=\left(\frac{r}{a}\right)^2(\gamma_2-e'f\cos F)=$$

$$=\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-e'\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)\right]$$

на основании формул (25).

Поэтому, руководствуясь недавно приведенным выражением

$$q^{-\frac{7}{2}}\{R\chi(\theta)+(S+2\lambda p)q\,.\,V+\lambda(q^2-p^2)\chi(\theta)\}$$

такого типичного интеграла, сразу умозаключаем, что контрольный интеграл равен

$$q^{-\frac{7}{2}}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-e'\alpha\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f)+2p\right]qV+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r}{a}\right)^2\left[-\frac{1}{3}(f^2-\gamma_0\gamma_2)\right]\chi(\theta)\right\}.$$

Если аналогично с формулами для вычисления интегралов (J_1); (J_2); (J_3) положить

$$F_0=-\frac{1}{3}\cdot\frac{f^2-\gamma_0\gamma_2}{\alpha^2\cos^2\varphi'}=-F_2;\quad J_0=\frac{2p}{\alpha^2\cos^2\varphi'}-\frac{tg\,\varphi'}{\cos\varphi'}\,\frac{1}{\alpha}\times$$

$$\times\frac{r}{a}k\cos(\Pi-K+f),$$

то интересующий нас интеграл напишется

$$q^{-\frac{7}{2}}\alpha^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos^2\varphi'\,\{J_0 q\,V+F_0\chi(\theta)\},$$

или окончательно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 dg'=\alpha^2.\left(\frac{r}{a}\right)^2.\cos^2\varphi'.q^{-\frac{7}{2}}\chi(\theta)\{F_0+J_0.W\}\qquad (J_0)$$

Заканчивая изложение мемуара Callandreau, следует указать еще техническо-вычислительные формулы, несколько упрощающие нахождение величин p; q; θ и α во изменение ранее приведенных формул (35)

Если положить $2q\sin\omega=p$, то окажется

$$(2q\cos\omega)^2=(2q)^2-(2q\sin\omega)^2=4p^2-\frac{4}{3}(f^2-\gamma_0\gamma_2)-p^2=$$

$$=\frac{1}{3}(\gamma_0-\gamma_2)^2-\frac{4}{3}(f^2-\gamma_0\gamma_2).$$

Далее

$$\sin 3(\omega - 60^\circ) = -\sin 3\omega = 4\sin^3\omega - 3\sin\omega = 4 . \frac{p^3}{8q^3} - 3 . \frac{p}{2q} =$$

$$= \frac{p^3 - 3pq^2}{2q^3} = \frac{p(p^2 - 3q^2)}{2q^3},$$

так что

$$\sin\theta = \sin 3(\omega - 60^\circ) + \gamma_2 . \frac{f^2 \sin^2 F}{2q^3};$$

по малости величины θ^2 можно думать, что γ^2 мало отличается от $3(\omega - 60^\circ)$, и если

$$\frac{\theta}{3} = \omega - 60^\circ + \delta\omega$$

то

$$\sin\theta - \sin 3(\omega - 60^\circ) = 2\sin\frac{\theta - 3\omega + 180^\circ}{2} \cos\frac{\theta + 3\omega - 180^\circ}{2} =$$

$$= -2\sin\frac{3\delta\omega}{2}\cos\left(3\omega + \frac{3\delta\omega}{2}\right) = \gamma_2 . \frac{f^2\sin^2 F}{2q^3}.$$

В результате—такие рабочие формулы

$$\left.\begin{aligned} &p = \frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2); \quad 2q\sin\omega = p; \quad (2q\cos\omega)^2 = \frac{1}{3}(\gamma_0 - \gamma_2)^2 + \\ &\qquad - \frac{4}{3}(f^2 - \gamma_0\gamma_2); \\ &\sin\frac{3\delta\omega}{2} = -\frac{\gamma_2}{2} . \frac{f^2\sin^2 F}{2q^3\cos\left(3\omega + \frac{3\delta\omega}{2}\right)}; \quad \frac{\theta}{3} = \omega - 60^\circ + \delta\omega; \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

по третьей из этих формул угол $\frac{3\delta\omega}{2}$ находится конечно последовательными приближениями, полагая сперва в правой части $\delta\omega = 0$, а затем продолжая пробы до тех пор, пока два последовательных результата не совпадут в пределах принятой точности.

Из формул

$$m^2 = \cos\frac{\theta}{3} = s^2(1 + \alpha)^2; \quad n^2 = \cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right) = s^2(1 - \alpha)^2$$

сразу получается

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \sqrt{\frac{\cos\left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right)}{\cos\frac{\theta}{3}}}.$$

Callandreau приводит подробные таблицы величин $\log\ [m^4 n^4 \chi(\theta)]$ и $\log\frac{\psi(\theta)}{\chi(\theta)}$, причем аргументом у него служит α и аргумент меняется от 0,000 до 1,000 с интервалами по 0,001 от $\alpha = 0$ до $\alpha = 0{,}4$, с интервалами по 0,002 от $\alpha = 0{,}4$ до $\alpha = 0{,}6$ и наконец, с интервалами по 0,005 от $\alpha = 0{,}6$ до $\alpha = 1.0$. Hill. в своем мемуаре „On Gauss's method of computing secular perturbations“ табулировал функции, связанные с функциями Callandreau очень простыми соотношениями.

В заключение своего мемуара Callandreau применяет развитый им аппарат формул к вычислению вековых возмущений планет (103) Héra.

Так как стержневым вопросом в вековых возмущениях планет является именно вычисление интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a\frac{\partial\Omega}{\partial v}\,dg'\,;\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}\,dg' \text{ и } \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ar\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\,dg' \text{ в обозначениях}$$

Hansen'a или, что тоже

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S\,dM'\,;\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T\,dM'\,;\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} W\,dM'$$

в обозначениях Halphen'a, Tisserand'a и других, то излагать конец мемуара Callandreau не представляется здесь нужным; скажем только, что Callandreau в своем предыдущем мемуаре занимался общими возмущениями планеты (103) Héra и в настоящем мемуаре ссылается на формулы и численные результаты предыдущей своей работы; в той и другой работе он вычисления ведет по системе Hansen'a, то есть сперва находит Hansen'овские возмущения $n\delta z\,;\ \nu$ и $u:\cos i$, а затем уже он от них переходит к возмущениям обычных элементов орбиты $a\,;\ e\,;\ i\,;\ M_0\,;\ \theta\,;\ \tilde\omega\,;\ \chi$.

В результате за один Юлианский год вековые возмущения (103) Héra от Юпитера, Сатурна и Марса вместе (Callandreau занимался только этими влиятельными планетами) оказываются такими:

$$\delta e = +1''.2269\,;\ \delta\chi = +42''.573\,;\ \delta i = +0{,}8141\,;\ \delta\theta = -43''.284\,;$$
$$\delta\tilde\omega = +42''.380\,;\ \delta M_0 = -98''.998.$$

Обращаясь к решению поставленной задачи, данному Halphen'ом, мы должны сначала сделать некоторую экскурсию в область эллиптических функций в форме Weierstrass'a (см. Halphen. Traité des fonctions elliptiques).

Если взять диференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\rho(u)$, а именно

$$[\rho'(u)]^2 = 4\,[\rho(u)]^3 - g_2\,\rho(u) - g_3\,J \tag{49}$$

и мыслить здесь функцию ρ, как функцию от трех независимых переменных u: g_2; g_3, то от тождества (49) можно взять частные производные как по g_2, так и по g_3; тогда получится, принимая во внимание, что $\rho''(u) = 6\,[\rho(u)]^2 - \frac{1}{2}\,g_2$,

$$2\rho'(u)\frac{\partial^2\rho(u)}{\partial u\,\partial g_2} = 12\,[\rho(u)]^2\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_2} - g_2\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_2} +$$
$$-\rho(u) = 2\rho''(u)\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_2} - \rho(u) \tag{50}$$

$$2\rho'(u)\frac{\partial^2\rho(u)}{\partial u\,\partial g_3} = 12\,[\rho(u)]^2\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_3} - g_2\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_3} - 1 = 2\rho''(u)\frac{\partial\rho(u)}{\partial g_3} - 1 \tag{51}$$

Возьмем теперь тождество

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g}\right]=\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial^2\wp(u)}{\partial u\,\partial g}-\frac{1}{[\wp'(u)]^2}\wp''(u)\frac{\partial\wp(u)}{\partial g}$$

обе части уравнений (50) и (51) разделим на $2[\wp'(u)]^2$; тогда

$$\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial^2\wp(u)}{\partial u\,\partial g_2}=\frac{\wp''(u)}{[\wp'(u)]^2}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_2}-\frac{\wp(u)}{2[\wp'(u)]^2}$$

$$\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial^2\wp(u)}{\partial u\,\partial g_3}=\frac{\wp''(u)}{[\wp'(u)]^2}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_3}-\frac{1}{2[\wp'(u)]^2},$$

а это можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_2}\right\}=-\frac{\wp(u)}{2[\wp'(u)]^2}\tag{52}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\wp'(u)}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_3}\right\}=-\frac{1}{2[\wp'(u)]^2}\tag{53}$$

Как известно $\zeta'(u)=-\wp(u)$; рассмотрим теперь такое тождество

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\zeta(u+\frac{6\wp^2(u)-g_2}{3\wp'(u)}\right]=-\wp(u)+$$

$$+\frac{3\wp'(u).12\wp(u)\wp'(u)-[6\wp^2(u)-g_2]\,3\wp''(u)}{9[\wp'(u)]^2}=$$

$$=\frac{[-9\wp(u)+36\wp(u)]\;[4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3]-[6\wp^2(u)-g_2]}{9[\wp'(u)]^2}\times$$

$$\times\frac{\left[18\wp^2(u)-\frac{3}{2}g_2\right]}{1}=\frac{-27\,g_3\,\wp(u)-\frac{3}{2}g^2{}_2}{9\wp'^2(u)}$$

Окончательно

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\zeta(u)+\frac{6\wp^2(u)-g_2}{3\wp'(u)}\right\}=-6g_3\frac{\wp(u)}{2\wp'^2(u)}-\frac{\frac{1}{3}g^2{}_2}{2\wp^2(u)}.$$

Применяя к правой части этого последнего тождества формулы (52) и (53), имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\zeta(u)+\frac{6\wp^2(u)-g_2}{3\wp'(u)}\right\}=\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{6g_3}{\wp'(u)}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_2}+\frac{\frac{1}{3}g^2{}_2}{\wp'(u)}\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_3}\right\}$$

Поэтому функции, стоящие в правой и левой частях этого равенства в фигурных скобках, или равны, или отличаются на постоянное, независящее от u; но, как известно,

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+a_2u^2+a_4u^4+\ldots\ldots,\quad \text{при чем } a_2=\frac{g_2}{20}$$

$$\wp'(u)=-\frac{2}{u^3}+2a_2u+4a_4u^3+\ldots\ldots$$

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\frac{a_2}{3}u^3+\ldots\ldots$$

Поэтому в функции $\zeta(u) + \dfrac{6\wp^2(u) - g_2}{3\wp'(u)}$ член с отрицательной степенью и свободный член будет

$$\frac{1}{u} + \frac{6u^{-4} + 12a_2 - g_2}{-6u^{-3} + 6a_2u + \ldots} - \frac{a_2}{3}u^3 = \frac{1}{u} + \frac{6u^{-4} - 8a_2}{-6u^{-3} + 6a_2u + \ldots} +$$

$$-\frac{a_2}{3}u^3 = \frac{1}{u} - \frac{1}{u} + \frac{1}{3}a_2u^3 - \frac{1}{3}a_2u^3 + \ldots.$$

то есть ни того, ни другого не будет, а поэтому левая фигурная скобка обращается в нуль при $u=0$; обращается в нуль при $u=0$ и правая фигурная скобка, ибо в ней член с отрицательной степенью и не зависящий от u получается из

$$\frac{6g_3}{-2u^{-3}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial g_2}u^2 + \ldots\right) + \frac{\frac{1}{3}g_2^2}{-2u^{-3}}\left(\frac{\partial a_4}{\partial g_3}u^4 + \ldots\right) = b_1u^5 + b_2u^7 + \ldots\ldots$$

Таким образом скобки в предыдущем уравнении одинаковы, т. е.

$$12\,g_3\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_3} = 2\wp'(u)\zeta(u) + 4\,[\wp'(u)]^2 - \tfrac{2}{3}g_2 \qquad (54);$$

имея некоторую функцию $\Phi(g_2; g_3)$, условимся оператор левой части (54) обозначать D, т. е. писать

$$D\,\Phi(g_2; g_3) = 12g_3\frac{\partial\Phi(g_2; g_3)}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\Phi(g_2; g_3)}{\partial g_3} \qquad (55)$$

Если взять

$$\Phi(g_2; g_3) = g_2^3 - 27g_3^2 = \Delta,$$

то

$$D(\Delta) = 12g_3.3\,g_2^2 + \frac{2}{3}g_2^2(-54g_3) = 0$$

Рассмотрим теперь абсолютный инвариант

$$J = g_2^3 : \Delta; \quad J - 1 = 27g_3^2 : \Delta \quad [\Delta = g_2^3 - 27g_3^2].$$

Ясно, что оператор D от дроби составляется по правилу составления производной от дроби; поэтому

$$D[J] = D[g_2^3 : \Delta] = \frac{1}{\Delta}Dg_2^3 = \frac{1}{\Delta}3g_2^2.12g_3 = 36\,g_2^2\,g_3 : \Delta;$$

но

$$g_2 = \Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}};\ g_3 = (J-1)^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}.(27)^{-\frac{1}{2}};$$

поэтому

$$g_2^2g_3 = \Delta^{\frac{2}{3}}J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}.\Delta^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{\sqrt{3}},$$

так что

$$D(J) = 36\,\Delta^{-1}\frac{1}{3\sqrt{3}}\Delta^{\frac{7}{6}}J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}\,\Delta^{\frac{1}{6}}J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}} \qquad (56)$$

Оператор D над функцией от функции составляется так же, как производная функции от функции, т. е.

$$DF[f(g_2; g_3)] = F'(f).Df(g_2; g_3).$$

Еще небольшое замечание; если имеется n-ая производная от функции $\wp(u;\ g_2;\ g_3)$ по u, т. е. $\wp^{(n)}(u;\ g_2;\ g_3)$, при чем в ней u есть функция от аргумента, подобного u, и еще от g_2 и g_3, т. е. если имеем

$$\wp^{(n)}(v;\ g_2;\ g_3) \qquad [v = v(u;\ g_2;\ g_3)],$$

то, так как оператор D подчиняется правилам производной, окажется

$$D\left[\wp^{(n)}(v;\ g_2;\ g_3)\right] = D\left[\wp^{(n)}(u;\ g_2;\ g_3)\right]_{u=v} + \wp^{(n+1)}(v;\ g_2;\ g_3)\,D(v) \qquad (57);$$

здесь $D\left[\wp^{(n)}(u;\ g_2;\ g_3)\right]_{u=v}$ надо понимать, конечно, в том слысле, что D совершается, не трогая u, а потом u заменяется через v.

Но из равенства (54), беря от обеих частей его производную по u, можно получить, что

$$D\wp'(u) = -2\wp(u)\wp'(u) + 2\zeta(u)\wp''(u) + 8\wp(u)\wp'(u) =$$

$$= 6\wp(u)\wp'(u) + \zeta(u)\left[12\wp^2(u) - g_2\right] \qquad (58);$$

левая часть здесь написана в виде $D\wp'(u)$, потому что операция D и взятие частной производной по u, не зависящему от g_2 и g_3, — переместительны.

Возьмем теперь в формуле (5) $n=1$ и $v = \omega =$ какому либо полупериоду функции $\wp(u;\ g_2;\ g_3)$, т. е. возьмем $D\left[\wp'(\omega);\ g_2;\ g_3)\right]$; известно, что $\wp'(\omega;\ g_2;\ g_3)$ **тождественно** равно нулю, если ω мыслить, как функцию от g_2 и g_3, а поэтому левая часть (57) в настоящем случае обратится в нуль и мы, памятуя, что $12\wp^2(u) - g_2 = 2\wp''(u)$, получим по формуле (58).

$$0 = \zeta(\omega)\,2\wp''(\omega) + \wp''(\omega)\,D(\omega);$$

отсюда просто

$$D(\omega) = -2\zeta(\omega) = -2y \qquad (59)$$

Узнаем теперь, чему равно $D(y)$; с этой целью посмотрим сперва, чему равно $D\zeta(u)$; так как $\wp(u) = -\dfrac{d\zeta}{du}$, то по формуле (54) и закону переместительности

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{-D(\zeta)\right\} = 2\zeta(u)\wp'(u) + 4\wp^2(u) - \frac{2}{3}g_2 = 2\left[\wp'(u)\zeta(u) - \wp^2(u)\right] +$$

$$+ 6\wp^2(u) - \frac{2}{3}g_2 = 2\frac{\partial}{\partial u}\left[\zeta(u)\wp(u)\right] + \wp''(u) - \frac{1}{6}g_2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left\{2\zeta(u)\wp(u) + \wp'(u) - \frac{1}{6}g_2 u\right\};$$

но $D\zeta(u;\ g_2;\ g_3)_{u=0} = 0$, ибо при операции D первый член $\dfrac{1}{u}$ в $\zeta(u)$ пропадает; равным образом $\left(2\zeta(u)\wp(u) + \wp'(u) - \dfrac{1}{6}g_2 u\right)_{u=0} =$

$$= \left\{\left(\frac{2}{u} + au^3 + \ldots\right)\left(\frac{1}{u^2} + bu^2 + \ldots\right) - \frac{2}{u^3}\right\}_{u=0} = 0.$$

Поэтому

$$D\zeta(u;\ g_2;\ g_3) = -2\zeta(u)\wp(u) - \wp'(u) + \frac{1}{6}g_2 u \qquad (60)$$

Пусть теперь в формуле (57) вместо $\wp^{(n)}(v; g_2; g_3)$ возьмем $\zeta(\omega; g_2; g_3) = \eta$ тогда

$$D\eta = -2\eta\wp(\omega) + \frac{1}{6} g_2 \omega - \wp(\omega) D(\omega),$$

или на основании (59),

$$D\eta = + \frac{1}{6} g_2 \omega \tag{61}$$

После всего вышеизложенного можно вплотную подойти к изображению ω и η посредством гипергеометрических рядов Гаусса. Известное свойство однородности функции $\wp(u; g_2; g_3)$, а именно

$$\wp\left(\frac{u}{\sqrt{\mu}};\ \mu^2 g_2;\ \mu^3 g_3\right) = \mu\wp(u;\ g_2;\ g_3)$$

ясно показывает, что если u считать минус $\frac{1}{2}$ порядка размерности, g_2—плюс второго, а g_3—плюс третьего порядка размерности, то вся функция $\wp(u; g_2; g_3)$ будет плюс первого порядка размерности, или иначе:

Если u—плюс первого порядка размерности,
g_2—минус четвертого порядка размерности,
g_3—минус шестого порядка размерности,
то $\wp(u; g_2; g_3)$—минус второго порядка размерности.

Но ω имеет размерность u; следовательно, ω—плюс первого порядка размерности, $\Delta g_2^3 - 27 g_3^2$ минус двенадцатого порядка размерности, так что $\omega\Delta^{\frac{1}{12}} = x$ есть однородная функция нулевого порядка размерности.

При этих условиях $\zeta(u; g_2; g_3)$—минус первого порядка размерности, равно как $\eta = \zeta(\omega)$. Следовательно, $y' = \eta\Delta^{-\frac{1}{12}}$ есть тоже однородная функция нулевого порядка размерности.

Таким образом x и y' можно трактовать, как функции только абсолютного инварианта J.

Поэтому

$$D(x) = \frac{dx}{dJ} DJ = \Delta^{\frac{1}{12}} D(\omega) = \Delta^{\frac{1}{12}} (-2\eta) = \frac{dx}{dJ} 4\sqrt{3}\, \Delta^{\frac{1}{6}} J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}}$$

на основании (56); отсюда

$$\frac{dx}{dJ} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta^{\frac{1}{12}} \eta\, \Delta^{-\frac{1}{6}} J^{-\frac{2}{3}} (J-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (J-1)^{-\frac{1}{2}} J^{-\frac{2}{3}} y' \tag{62}$$

Аналогично

$$D(y') = \frac{dy'}{dJ} D(J) = \Delta^{-\frac{1}{12}} D(\eta) = \Delta^{-\frac{1}{12}} \frac{1}{6} g_2 \omega = \frac{dy'}{dJ} 4\sqrt{3}\, \Delta^{\frac{1}{6}} J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}};$$

отсюда

$$\frac{dy'}{dJ} = \frac{1}{24\sqrt{3}} g_2 \omega \Delta^{-\frac{1}{4}} J^{-\frac{2}{3}} (J-1)^{-\frac{1}{2}};$$

но

$$g_2 = \Delta^{\frac{1}{3}} J^{\frac{1}{3}},\ \text{так что}\ \omega g_2 \Delta^{-\frac{1}{4}} = \omega \Delta^{\frac{1}{12}} J^{\frac{1}{3}} = J^{\frac{1}{3}} x$$

и тогда

$$\frac{dy'}{dJ}=\frac{1}{24\sqrt{3}}J^{\frac{1}{3}}xJ^{-\frac{2}{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{24\sqrt{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{-\frac{1}{3}}x \qquad (63)$$

Пусть

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{-\frac{2}{3}}y'=y;$$

тогда

$$\frac{dx}{dJ}=-y \qquad (64)$$

Но

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dJ}=\frac{1}{y'}\frac{dy'}{dJ}-\frac{2}{3J}-\frac{1}{2(J-1)}$$

отсюда

$$\frac{dy}{dJ}=\frac{y}{y'}\frac{dy'}{dJ}-y\left\{\frac{2}{3J}+\frac{1}{2(J-1)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{-\frac{2}{3}}\frac{dy'}{dJ}-y\,\frac{7J-4}{6J(J-1)}=$$

$$=\frac{1}{144}(J-1)^{-1}J^{-1}x-y\cdot\frac{7J-4}{6J(J-1)};$$

проще говоря,

$$144J(J-1)\frac{dy}{dJ}+24(7J-4)y-x=0 \qquad (65)$$

Из уравнений (64) и (65) можно получить или диференциальное уравнение с неизвестной функцией y или диференциальное уравнение с неизвестной функцией x; получим то и другое.

Диференцируя уравнение (64) по J, заменяя $\frac{dy}{dJ}$ его выражением из (65), а затем еще раз заменяя y через $-\frac{dx}{dJ}$, получим

$$144J(J-1)\frac{d^2x}{dJ^2}-24(7J-4)\left(-\frac{dx}{dJ}\right)+x=0$$

или

$$J(1-J)\frac{d^2x}{dJ^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}J\right)\frac{dx}{dJ}-\frac{1}{144}x=0 \qquad (66)$$

Это—гипергеометрическое уравнение Гаусса типа

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta.y=0,$$

в данном случае

$$\alpha=\beta=\frac{1}{12};\qquad \gamma=\frac{2}{3}.$$

Если же взять производную по J от уравнения (65) и заменить в ней $\frac{dx}{dJ}$ через $-y$, то получится

$$144J(J-1)\frac{d^2y}{dJ^2}+(288J-144)\frac{dy}{dJ}+168y+(168J-96)\frac{dy}{dJ}+y=0$$

или

$$J(1-J)\frac{d^2y}{dJ^2}+\left(\frac{5}{3}-\frac{19}{6}J\right)\frac{dy}{dJ}-\frac{169}{144}y=0 \tag{67}$$

Это—опять гипергеометрическое уравнение Гаусса, в котором

$$\alpha=\beta=\frac{13}{12};\quad \gamma=\frac{5}{3}.$$

Здесь у Halphen'a (Traité des fonctions elliptiques, T. I, стр 313) очень странная ошибка; вместо правильного уравнения (67) он пишет

$$J(1-J)\frac{d^2y}{dJ^2}+\frac{1}{6}(5-19J)\frac{dy}{dJ}-\frac{53}{48}y=0.$$

Как мог Halphen из простых уравнений (64) и (65) получить такую несуразность,— трудно постигнуть.

В последующем нас будет более интересовать вопрос, каким гипергеометрическим уравнениям удовлетворяют $\omega\sqrt[4]{g_2}$ и $\eta\sqrt[4]{g_2^{-1}}$, а не $x=\omega\Delta^{\frac{1}{12}}$ и $y=\frac{1}{2\sqrt{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{-\frac{2}{3}}\Delta^{-\frac{1}{12}}.\eta$; кроме того в применении к вековым возмущениям нас будет интересовать случай $\Delta>0$, так что $J-1=27g_3^2:\Delta>0$ и $J>1$, а поэтому сходящиеся гипергеометрические ряды будут по степеням $\frac{J-1}{J}$ и $\frac{1}{J}$.

Из того, что $g_2=J^{\frac{1}{3}}\Delta^{\frac{1}{3}}$, следует, что

$$\omega\sqrt[4]{g_2}=\omega J^{\frac{1}{12}}\Delta^{\frac{1}{12}}=x\,.\,J^{\frac{1}{12}}\ \text{ и }\ \eta.g_2^{-\frac{1}{4}}=\eta J^{-\frac{1}{12}}\Delta^{-\frac{1}{12}}=$$

$$=2\sqrt{3}\,y\,(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{2}{3}}J^{-\frac{1}{12}}=2\sqrt{3}\,(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{\frac{7}{12}}y$$

Поэтому в уравнении (66) нужно положить $x=X.J^{-\frac{1}{12}}$, а в ур. (67) $y=\frac{Y}{2\sqrt{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{-\frac{7}{12}}$. Но гипергеометрическое уравнение кроме интеграла $F(\alpha;\beta;\gamma;x)$ допускает еще интегралы $x^{-\alpha}F\left(\alpha;\ \alpha-\gamma+1;\ \alpha-\beta+1;\frac{1}{x}\right)$ и $x^{-\alpha}F\left(\alpha;\ \alpha-\gamma+1;\ \alpha+\beta-\gamma+1;\frac{x-1}{x}\right)$, или полагая $\alpha=\beta=\frac{1}{12}$, $\gamma=\frac{2}{3}$; $\frac{J-1}{J}=\xi$; $\frac{1}{J}=1-\xi$, интегралы

$$J^{-\frac{1}{12}}F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ \frac{1}{J}\right)\ \text{ и }\ J^{-\frac{1}{12}}F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\frac{J-1}{J}\right).$$

Отсюда ясно, что $X=\omega\sqrt[4]{g_2}$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению вида

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\xi\right)\frac{dX}{dJ}-\frac{5}{144}X=0, \tag{68}$$

частными интегралами которого будут

$$F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right);\ \xi^{\frac{1}{2}} F\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right);\ F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right).$$

Второй частный интеграл, разложимый по степеням $1-\xi$, найдется из известного соображения: если $1-\xi=\psi$, то уравнение (68) обращается в

$$\psi(1-\psi)\frac{d^2X}{d\psi^2}+\left(1-\frac{3}{2}\psi\right)\frac{dX}{d\psi}-\frac{5}{144}X=0$$

и здесь
$$\alpha=\frac{1}{12};\ \beta=\frac{5}{12};\ \gamma=1.$$

Два частных интеграла этого уравнения, разложимые по степеням ψ, будут

$$X_1=F(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \psi) \text{ и } X_2=\psi^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1;\ \beta-\gamma+1;\ 2-\gamma;\ \psi)$$

и при $\gamma=1$ они совпадают. Пусть $\gamma=1-\varepsilon$, где ε—бесконечно малая величина.

Тогда $X_2=\psi^{\varepsilon} F(\alpha+\varepsilon;\ \beta+\varepsilon;\ 1+\varepsilon;\ \psi)$ и $X_1=F(\alpha;\beta;\ 1-\varepsilon;\ \psi)$; при этом $(X_2-X_1):\varepsilon$ будет тоже интегралом этого диференциального уравнения:

но

$$\frac{X_2-X_1}{\varepsilon}=$$

$$=\frac{\psi^{\varepsilon} F(\alpha+\varepsilon;\ \beta+\varepsilon;\ 1+\varepsilon;\ \psi)-F(\alpha;\ \beta;\ 1;\ \psi)+F(\alpha;\ \beta;\ 1;\ \psi)-F(\alpha;\ \beta;\ 1-\varepsilon;\ \psi)}{\varepsilon}$$

и предел

$$\left(\frac{X_2-X_1}{\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\varepsilon}\{\psi^{\varepsilon} F(\alpha+\varepsilon;\ \beta+\varepsilon;\ 1+\varepsilon;\ \psi\}_{\varepsilon=0}+\frac{d}{d\varepsilon}\{F(\alpha;\ \beta;\ 1+\varepsilon;\ \psi)\}_{\varepsilon=0}=$$

$$=F(\alpha;\ \beta;\ 1;\ \psi)\ ln\,\psi+\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\beta}+2\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=1};$$

Но

$$F(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \psi)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}\psi^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}U_n,$$

так что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\beta}+2\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial U_n}{\partial\alpha}+\frac{\partial U_n}{\partial\beta}+2\frac{\partial U_n}{\partial\gamma}\right)_{\gamma=1};$$

логарифмируя U_n, имеем

$$ln\,U_n=ln\,\alpha+ln(\alpha+1)+ln(\alpha+2)+\ldots+ln(\alpha+n-1)+ln\,\beta+ln(\beta+1)+$$
$$+ln(\beta+2)+\ldots+ln(\beta+n-1)-ln\gamma-ln(\gamma+1)-ln(\gamma+2)\ldots+$$
$$-ln(\gamma+n-1)+\text{const},$$

и следовательно

$$\frac{\partial U_n}{\partial \alpha} = U_n\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+n-1}\right];$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \beta} = U_n\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta+2} + \ldots + \frac{1}{\beta+n-1}\right];$$

$$2\frac{\partial U_n}{\partial \gamma} = U_n\left[-\frac{2}{\gamma} - \frac{2}{\gamma+1} - \frac{2}{\gamma+2} - \ldots - \frac{2}{\gamma+n-1}\right]_{\gamma=1} =$$

$$= U_n\left[-\frac{2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \ldots - \frac{2}{n}\right];$$

$$H_0(U_n)_{\gamma=1} = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{(1.2.3\ldots n)^2}\psi^n.$$

В нашем случае

$$\frac{\partial U_n}{\partial \alpha} = U_n\left[12 + \frac{12}{13} + \frac{12}{25} + \ldots + \frac{12}{12n-11}\right] =$$

$$= 12U_n\left[1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{12n-11}\right];$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \beta} = U_n\left[\frac{12}{5} + \frac{12}{17} + \frac{12}{29} + \ldots + \frac{12}{12n-7}\right] =$$

$$= 12U_n\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{17} + \frac{1}{29} + \ldots + \frac{1}{12n-7}\right];$$

$$2\frac{\partial U_n}{\partial \gamma} = -2U_n\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right].$$

Пусть для краткости

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 6\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{12n-11}\right) - 6\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{17} + \frac{1}{29} + \ldots + \frac{1}{12n-7}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial U_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial U_n}{\partial \beta} + 2\frac{\partial U_n}{\partial \gamma} = -2U_n T_n$$

и в дополнение к частному интегралу $F\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; 1; 1-\xi\right)$ второй частный интеграл будет

$$F\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; 1; 1-\xi\right) l_n(1-\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} -2U_n T_n$$

или, отрешаясь от множителя—2,

$$Z_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}+1\right)\left(\frac{1}{12}+2\right)\dots\left(\frac{1}{12}+n-1\right)\frac{5}{12}\left(\frac{5}{12}+1\right)\left(\frac{5}{12}+2\right)\dots\left(\frac{5}{12}+n-1\right)}{(1.2.3\dots n)^2\,(1.2.3\dots n)^2}T_n(1-\xi)^n+F\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};1;1-\xi\right)ln\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} \qquad (69)$$

Далее у нас будет встречаться, как выше указано, случай $\Delta>0$, т. е. $J>1$ при изменении J от 1 до ∞ аргумент ξ будет меняться от 0 до 1.

Рассмотрим сперва случай $g_3>0$ и пусть ω—полувещественный период. Тогда [См. Halphen. Traité des fonctions elliptiques T. I. Стр. 64 и 67] при $g_3=0$, т. е. при $J=1$ и $\xi=0$ имеем $\omega\sqrt[4]{g_2}=$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$, где Γ Эйлерова функция, а при $J=\infty$, т. е.

при $\Delta=0$ и $\xi=1$ имеем $\omega\sqrt[4]{g_2}=\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}$.

С другой стороны $\omega\sqrt[4]{g_2}$, как интеграл уравнения (68), изображается в виде

$$C_1.F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)+C_2Z_2;$$

ясно, что $C_2=0$, ибо иначе при $\xi=1$ $\omega\sqrt[4]{g_2}$ обратилось бы в бесконечность. Что касается до C_1, то ясно, что $C_1=\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}$, ибо при

$\xi=1$ должно быть $\omega\sqrt[4]{g_2}=\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}$.

Кроме того [См. Gauss. Disquisitiones generales circa seriem infinitam. Werke. T. III, стр. 139 и Goursat. Cours d'analyse mathématique T. I. стр. 389] $F(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ 1)$ сохраняет конечную величину, лишь если $\alpha+\beta-\gamma<0$; в нашем случае $\left(\alpha=\frac{1}{12};\ \beta=\frac{5}{12};\ \ \gamma=1\right)$ это условие выполняется, и тогда $F(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$ [См. Gauss. Werke.

Т. III стр. 147 или Forsyth. A treatise on differential equations, стр 197].

В нашем случае

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; 1\right) = \frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}$$

Пользуясь теперь формулой

$$\frac{n^{nz}\,\Gamma(z+1)\,\Gamma\left(z+1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+1-\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+1-\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nz+1)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(См. Gauss. Werke. Т. III, стр. 150) и полагая в ней $n=3$; $z=-\frac{1}{12}$, имеем

$$\frac{3^{-\frac{1}{4}}\,\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},$$

так что

$$F\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; 1; 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

а по формуле

$$\omega\sqrt[4]{g_2} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}\,F\left(\frac{1}{12}; \frac{5}{12}; 1; 1-\xi\right)$$

при $\xi=0$ имеем

$$\omega\sqrt[4]{g_2} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt[4]{3}\;\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2}\;\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

как и было ранее указано; и так несомненно, что если $g_3>0$ и речь идет о половине вещественного периода ω, то

$$\omega\sqrt[4]{g_2}=\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)\qquad\left[\xi=\frac{J-1}{J}\right]$$

Ясно, что практически эта формула удобна в смысле быстроты сходимости ряда, если $\xi>\frac{1}{2}$; если же $\xi<\frac{1}{2}$, то надо искать разложение по степеням ξ.

На основании того, что было сказано только что после формулы (68), несомненно, что

$$\omega\sqrt[4]{g_2}=MF\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right)+N\xi^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\qquad(70)$$

Вопрос очевидно упирается в нахождение коэфициентов μ и ν в зависимости между 3 частными интегралами гипергеометрического уравнения.

$$F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)=\mu F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right)+\nu\sqrt{\xi}\,F\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\qquad(71)$$

и тогда

$$M=\mu\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}};\qquad N=\nu.\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}};$$

как известно (см. Forsyth. A treatise on differential equations, стр. 198),

$$-\frac{\nu}{\mu}=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\quad\text{и}\quad\frac{1}{\mu}=\frac{\Gamma(\beta-\gamma-1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\,\Gamma(1-\gamma)}.$$

В данном случае $\alpha=\frac{1}{12}$; $\beta=\frac{5}{12}$; $\gamma=\frac{1}{2}$, так что

$$\mu=\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)}\quad\text{и}\quad\nu=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)}.$$

Если взять вышеприведенную формулу (Gauss. Werke. III, стр. 150) с произведением Γ функций и взять в ней $n=3$; $z=-\frac{1}{4}$, то

$$\frac{3^{-\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}3^{\frac{3}{4}}=2\pi\sqrt[4]{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Принимая во внимание ранее указанное значение

$$\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)\Gamma\left(\frac{7}{12}\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt[4]{3}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)},$$

получим

$$\mu=\frac{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{3}\;\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

и

$$\nu=-\frac{\pi\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)2\pi\sqrt[4]{3}\;\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\;\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{3}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Окончательно

$$M=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)};\qquad N=-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

В дальнейшем нам встретится функция $\Psi(\xi)=\sqrt{2}\,.\,\omega\sqrt[4]{g_2}$ и тогда

$$\Psi(\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}F\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{2};\;\xi\right)+$$

$$-\sqrt{\pi}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}F\left(\frac{7}{12};\frac{11}{12};\frac{3}{2};\;\xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}}\tag{72}$$

Halphen обозначает

$$A=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\text{ и }B=\sqrt{\pi}\,.\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Интересно отметить, что коэфициенты A и B имеют отношение к простым интегралам, а именно

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = A;$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = B.$$

Численные значения:

$$A = 1{,}311028777146\ldots \quad ; \quad B = 0{,}599070117367\ldots.$$

Имеем

$$\Psi(\xi) = \omega \sqrt[4]{g_2}\sqrt{2} = 2A\, F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right) +$$

$$- BF\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}} \qquad (72').$$

Коэфициенты A и B у Halphen'а даны верно, но в формуле (72') у него странная ошибка: он пишет

$$\Psi(\xi) = 2AF\left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right) - BF\left(\frac{7}{12};\ \frac{7}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}} \qquad !!$$

Как мог такой первоклассный математик, как Halphen, сделать такую ошибку в сравнительно простых подсчетах,—трудно понять!

Соотношение (72) дает четкий и простой переход к случаю $g_3 < 0$. Так как $\xi = 27 g_3^2 : g_2^3$, то

$$\sqrt{\frac{\xi}{3}} = \frac{3g_3}{g_2\sqrt{g_2}}.$$

Кроме того $B = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ и $F\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)$ при ξ, изменяющемся от 0 до 1—существенно положительные величины; далее, при g_3, изменяющемся от 0 до $+\sqrt{\left(\frac{g_2}{3}\right)^3}$, т. е. при J, изменяющемся от

$+1$ до $+\infty$, т. е. при ξ изменяющемся от 0 до $+1$, имеем $\omega < \frac{\omega'}{i}$, где ω' чисто мнимый полупериод $\wp(u;\ g_2;\ g_3)$ [См. Halphen. Traité des fonctions élliptiques. T. I, стр. 64]; наконец при g_3, изменяющемся от 0 до $-\sqrt{\left(\frac{g_2}{3}\right)^3}$ т. е. при тех же пределах изменения ξ, будет $\omega > \frac{\omega'}{i}$ [См. Halphen. T. I. там же], при чем при $g_3=0$, т. е. при $\xi=0$ будет $\omega=\frac{\omega'}{i}$; если в заключение вспомнить, что $\wp(iu;\ g_2;\ g^3)=-\wp(u;\ g_2;\ g_3)$, то видно, что вещественный период функций $\wp(u;\ g;\ -g_3)$ равен чисто мнимому периоду функции $\wp(u;\ g_2;\ +g_3)$ и наоборот, так что если в формуле (72′) перед вторым членом правой части переменить знак на обратный, то в левой части получится $\omega\sqrt[4]{g_2}\cdot\sqrt{2}$ при $g_3<0$. Эту мысль Halphen выражает (и совершенно правильно) так что в правой части (72′), не взирая на знак минус, стоящий перед вторым членом правой части, $\sqrt{\xi:3}$ должно брать с тем же знаком, который имеет g_3.

Посмотрим теперь, каким другим способом выражается $\Psi(\xi)$, если $\xi>\frac{1}{2}$, т. е. если использовать ряды по степеням $1-\xi=\frac{1}{J}$.

Из теории эллиптических функций известно, что при $J\to+\infty$ (т. е при $\xi\to+1$) предел $\left[\sqrt[4]{12g_2}\ \omega-ln\left(24\sqrt{3J}\right)\right]=0$ [см. Halphen. Traité des fonctions élliptiques. T. I. Стр. 67]; это соображение дает возможность из двух частных интегралов

$$Z_1=F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ \frac{1}{J}\right)$$

и

$$Z_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}+1\right)\left(\frac{1}{12}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{12}+n-1\right)\cdot\frac{5}{12}\left(\frac{5}{12}+1\right)}{(1.2.3\ldots\ n)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{5}{12}+2\right)\ldots\left(\frac{5}{12}+n-1\right)}{(1.2.3\ldots n)^2}\cdot T_n(1-\xi)^n+F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ \frac{1}{J}\right)ln\sqrt{J}$$

составить комбинацию, удовлетворяющую этому требованию

$$Z=\alpha Z_1+\beta Z_2.$$

При $J=+\infty$ очевидно $F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ \frac{1}{J}\right)=1$; поэтому необходимо взять $\alpha=ln\,(24\sqrt{3})$ и $\beta=1$, так что

$$\sqrt[4]{12g_2}\ .\ \omega=F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)ln\,(24\sqrt{3J})+\sum_{1=n}^{\infty}\ldots\ldots,$$

а следовательно

$$\Psi(\xi)=\frac{\omega\sqrt[4]{12g_2}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left\{F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ 1;\ 1-\xi\right)ln\left(\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{1-\xi}}\right)+Q\right\}, \quad (73)$$

где

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}+1\right)\left(\frac{1}{12}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{12}+n-1\right)\frac{5}{12}\left(\frac{5}{12}+1\right)}{(1.2.3\ldots n)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{5}{12}+2\right)\ldots\left(\frac{5}{12}+n-1\right)}{(1.2.3\ldots n)^2}T_n(1-\xi)^n \qquad (74)$$

и

$$T=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-6\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12n-11}\right)-6\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+\ldots+\frac{1}{12n-7}\right) \qquad (75)$$

Это место у Halphen'a тоже совершенно правильно; формулы (73); (74); (75) конечно удобны, если $\xi>\frac{1}{2}$.

В дальнейшем при изложении способа Halphen'a нам понадобится еще выражение $\eta g_2^{-\frac{1}{4}}$, где $\eta=\zeta(\omega)$,—и это последний теоретический вопрос, который мы затронем, а затем прямо перейдем к изложению самого способа Halphen'a.

По формуле (59) сразу $\eta=-\frac{1}{2}D(\omega)$.

Прежде всего

$$Dg_2^{-\frac{1}{4}}=12g_3\frac{dg_2^{-\frac{1}{4}}}{dg_2}=12g_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)g_2^{-\frac{5}{4}}=-3\frac{g_3}{g_2}g_2^{-\frac{1}{4}}.$$

Далее

$$D\xi=D\,(27g_3^2:g_2^3)=D\,(27g_3^2\,g_2^{-3})=27g_2^{-3}\,2g_3\,\frac{2}{3}\,g_2^2+$$

$$+27g_3^2\,(-3g_2^{-4}).12g_3=36g_3\,g_2^{-1}-36.27g_3^3\,g_2^{-4}=$$

$$=36g_3\,g_2^{-4}\,(g_2^3-27g_3^2)=36g_3\,\frac{\Delta}{g_2^4}.$$

Подвергнем теперь обе части равенства

$$\Psi(\xi)=\omega\sqrt[4]{4g_2}$$

оператору D; тогда окажется, что

$$\Psi'(\xi).36g_3\frac{\Delta}{g_2^4}=\sqrt[4]{4g_2}\,(-2\eta)+\omega\sqrt[4]{4}\,.\frac{1}{4}\,g_2^{-\frac{3}{4}}\,12g_3.$$

Отсюда

$$2\sqrt{2}\,g_2^{\frac{1}{4}}\eta=\omega\sqrt{2}\,.\,3g_2^{-\frac{3}{4}}\,g_3-\frac{36g_3\Delta}{g_2^4}\,\Psi'(\xi)$$

и окончательно

$$\eta=\frac{3}{2}\frac{g_3}{g_2}\,\omega-\frac{18g_3\Delta}{g_2^4\sqrt[4]{4g_2}}\,\Psi'(\xi) \qquad (76)$$

Это и есть формула, которой пользуется Halphen и которая нам вскоре встретится.

Теперь можно приступить к изложению самого метода Halphen'а. Halphen начинает рассуждения с формулы для притяжения эллиптического кольца, на которое указывал Гаусс. Сперва Halphen берет задачу в общем виде, не считая кольцо именно эллиптическим, а предполагая лишь закон распределения плотности вещества в кольце прямо пропорционально площади сектора, вершиной которого служит некоторая постоянная точка в плоскости кольца и внутри его, а основанием которого служит бесконечно малая дуга кольца. Пусть притягиваемая точка в начале координат и пусть координаты постоянной точки внутри кольца суть $(x_0;\ y_0;\ z_0)$; координаты некоторой точки кольца суть $(x,\ y;\ z)$, а координаты безконечно близкой точки кольца суть $(x+dx;\ y+dy;\ z+dz)$, а расстояние от притягиваемой точки до плоскости кольца есть h; тогда объем тетраэдра, составленного из четырех вышеупомянутых точек (вернее—абсолютная величина этого объема), будет

$$\pm|V| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left[x_0(ydz - zdy) + y_0(zdx - xdz) + \right.$$
$$\left. + z_0(xdy - ydx)\right].$$

Если за основание этого тетраэдра принять площадь бесконечно-малого сектора с вершиной в постоянной точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и с безконечно-малой дугой кольца, то так как объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ площади основания, умноженной на высоту, площадь (вернее абсолютная величина этой площади) получится в виде $V:\frac{1}{3}h$, то есть

$$\pm|d\sigma| = \frac{1}{2h}\left[x_0(ydz - zdy) + y_0(zdx - xdz) + z_0(xdy - ydx)\right].$$

Чтобы составить проекции притяжения этой безконечно малой дуги на начало координат, нужно только что написанное выражение $|d\sigma|$ умножить на $1:(x^2+y^2+z^2)$, а затем по очереди умножить на направляющие косинусы линии действия силы, т. е. соответственно на

$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, а для получения притяжения всего кольца интегрировать три полученные выражения по всему кольцу, обозначая $x^2+y^2+z^2=\rho^2$; тогда эти силы притяжения выразятся так:

$$\Phi_x = \frac{1}{h}\left\{\int\frac{1}{2}\frac{x}{\rho^3}(xdz - zdy)\,x_0 + \int\frac{1}{2}\frac{x}{\rho^3}(zdx - xdz)\,y_0 + \right.$$
$$\left. + \int\frac{1}{2}\frac{x}{\rho^3}(xdy - ydx).z_0\right\};$$

$$\Phi_y = \frac{1}{h}\left\{\int\frac{1}{2}\frac{y}{\rho^3}(ydz - zdy).x_0 + \int\frac{1}{2}\frac{y}{\rho^3}(zdx - xdz)\,y_0 + \right.$$
$$\left. + \int\frac{1}{2}\frac{y}{\rho^3}(xdy - ydx)\,z_0\right\};$$

$$\Phi_z = -\frac{1}{h}\left\{\int \frac{1}{2}\frac{z}{\rho^3}(ydz - zdy)\, x_0 + \int \frac{1}{2}\frac{z}{\rho^3}(zdx - xdz)\, y_0 + \right.$$

$$\left. + \int \frac{1}{2}\frac{z}{\rho^3}(xdy - ydx)\, z_0 \right\};$$

или, полагая

$$\left.\begin{aligned} dP_x &= \frac{1}{2}\frac{x\,(ydz - zdy)}{\rho^3}; \; dP_y = \frac{1}{2}\frac{y\,(ydz - zdy)}{\rho^3}; \; dP_z = \frac{1}{2}\frac{z\,(ydz - zdy)}{\rho^3};\\ dQ_x &= \frac{1}{2}\frac{x\,(zdx - xdz)}{\rho^3}; \; dQ_y = \frac{1}{2}\frac{y\,(zdx - xdz)}{\rho^3}; \; dQ_z = \frac{1}{2}\frac{z\,(zdx - xdz)}{\rho^3};\\ dR_x &= \frac{1}{2}\frac{x\,(xdy - ydx)}{\rho^3}; \; dP_y = \frac{1}{2}\frac{y\,(xdy - ydx)}{\rho^3}; \; dR_z = \frac{1}{2}\frac{z\,(xdy - ydx)}{\rho^3}; \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

и обозначая через P_x; Q_x; ... интегралы этих выражений, взятые по всему кольцу,

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= -\frac{1}{h}\left\{ P_x x_0 + Q_x y_0 + R_x z_0 \right\}\\ \Phi_y &= -\frac{1}{h}\left\{ P_y x_0 + Q_y y_0 + R_y z_0 \right\}\\ \Phi_z &= -\frac{1}{h}\left\{ P_z x_0 + Q_2 y_0 + R_2 z_0 \right\} \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Девять диференциалов (77) суть однородные величины нулевого измерения относительно координат; поэтому интегралы P_x; P_y... R_z, взятые по контуру замкнутого кольца, не зависят от размеров этого кольца, а только от вида конуса, который из притягиваемой точки проектирует это кольцо. Это понятно и геометрически: $ydz - zdy$, напр., есть удвоенная площадь проекции элементарного $\triangle$-ка боковой поверхности проектирующего конуса на плоскость yz. Если x; y; z увеличатся в одинаковое количество раз, пусть в m раз, то $ydz - zdy$ увеличится в m^2 раз; x увеличится в m раз, а ρ^3 увеличится в m^3 раз и каждый элемент dP_x определенного интеграла, а значит и весь определенный интеграл, взятый по контуру замкнутого кольца, останется без изменения.

Девять величин P_x; P_y... R_z обладают еще замечательными свойствами, указанными Halphen'ом, независимыми от формы кольца и от положения точки (x_0; y_0; z_0) внутри его; во-первых, складывая dP_x; dQ_y и dR_z, получим

$$dP_x + dQ_y + dR_z = \frac{1}{2\rho^3}\begin{vmatrix} x & y & z\\ x & y & z\\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

а поэтому и $P_x + Q_y + R_z = 0$, как интеграл (определенный), все элементы которого нули.

Далее, если составить выражение $dQ_z - dR_y$, то получится

$$dQ_z - dR_y = \frac{1}{2\rho^3}\,[z^2dx - xz\,dz - xy\,dy + y^2dx] =$$

$$= \frac{1}{2\rho^3}\,[\rho^2dx - x\,(xdx + ydy + zdz] = \frac{1}{2\rho^3}\,[\rho^2dx - x\rho d\rho] =$$

$$= \frac{1}{2\rho^2}\,(\rho dx - xd\rho) = \frac{1}{2}\,d\left(\frac{x}{\rho}\right).$$

Так как после обхода контура кольца выражение $x:\rho$, конечно, возвращается, в случае замкнутого кольца, к своему прежнему значению, то, конечно, $\int d\left(\frac{x}{\rho}\right) = \left(\frac{x}{\rho}\right)_{\text{конец}} - \left(\frac{x}{\rho}\right)_{\text{начало}}$ равно нулю, т. е. $Q_z = R_y$; аналогично можно было бы убедиться, что $P_y = Q_x$ и $P_z = R_x$; короче говоря, определитель

$$\begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

симметричен относительно главной диагонали.

Если теперь вообразить себе квадратичную форму

$$\Phi = \frac{1}{2h}\left\{ P_x x_0^2 + Q_y y_0^2 + R_z z_0^2 + 2Q_x x_0 y_0 + 2R_y y_0 z_0 + 2P_z z_0 x_0 \right\}, \tag{79}$$

то в силу указанного свойства

$$\Phi_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x_0};\;\; \Phi_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y_0};\;\; \Phi_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z_0} \tag{80}$$

Формулы (80)—отправная точка в идеях Halphen'a.

Если в притягиваемой планете вообразить систему прямоугольных Декартовых координат астрономического рода, напр. ось x-ов в точку Овна и т. д., то конус, проектирующий из начала координат орбиту возмущающей планеты, вообще говоря, не будет отнесен к своим главным осям; но если этот конус отнести к его главным осям (осям симметрии), то ясно, что интегралы $P_y = Q_x$; $Q_z = R_y$; $P_z = R_x$ обратятся в нуль, ибо они будут состоять в силу симметрии из попарно равных по абсолютной величине и противоположных элементов, так что тогда просто

$$\Phi = \frac{1}{2h}\,(P_x x_0^2 + Q_y y_0^2 + R_z z_0^2) \tag{79'}$$

$$\Phi_x = \frac{1}{h} P_x x_0;\;\; \Phi_y = \frac{1}{h} Q_y y_0;\;\; \Phi_z = \frac{1}{h} R_z z_0 \tag{80'}$$

Красивый по идее и крайне изящный по форме выполнения процесс решения поставленной задачи о притяжении эллиптического кольца, предложенный Halphen'ом, заключается в следующем: если взять уравнение проектирующего конуса, о котором несколько раз была речь, в канонической форме

$$f(x;\, y;\, z) = \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} + \frac{z_0^2}{r} = 0, \tag{81}$$

то коэфициенты квадратичной формы (79′) при удачном выборе переменного интегрирования довольно просто выражаются через величины p; q; r, а также величины ω и η, свойственные функции Weierstrass'а $\wp(u; g_2; g_3)$, инварианты которой g_2; g_3—также не очень сложные алгебраические комбинации величин p; q; r, а следовательно, так же выражается и форма (79′). В таком случае окажется, что форма (79′) прежде всего тоже канонического вида, т. е. лишь с x^2; y^2; z^2, но без xy; yz; zx и что кроме того форма (79′) линейна относительно ω и η, а коэфициенты при этих величинах ω и η суть канонические формы с коэфициентами, очень просто составленными из p; q; r. Эти канонические формы Halphen обозначает через M и N и остроумно **в этом частном случае** путем перемножения определителей находит эти формы M и N при помощи формы (81) и еще

$$\varphi = px_0^2 + qy_0^2 + rz_0^2; \quad \psi = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \tag{82}$$

причем самое нахождение величин p; q; r, которые, как известно из аналитической геометрии, являются корнями кубического уравнения, обходится, так как p; q; r появляются в симметрических комбинациях, т. е. в виде коэфициентов упомянутого кубического уравнения.

Соотношение между формами M и N и формами f; φ; ψ инвариантно, ибо сами формы f; φ; ψ имеют инвариантный, т. е. не зависящий от выбора осей, характер: форма f есть левая часть уравнения проектирующего конуса; форма φ есть левая часть уравнения так называемого дополнительного конуса, который получается из проектирующего построением, не зависящим от поворота осей координат, а именно: через каждую образующую проектирующего конуса проводится к нему касательная плоскость и из вершины конуса восставляется перпендикуляр к этой касательной плоскости. Совокупность этих всех перпендикуляров и составляет то, что называют дополнительным конусом. Инвариантность же формы ψ при повороте осей координат ясна сама собой.

Потенциальное же свойство функции Φ, выражаемое формулами (79); (80)—инвариантно при повороте осей координат, как то известно из элементарных положений теории потенциала.

В заключение остается в осях координат, наиболее удобных с точки зрения аналитической геометрии, составить формы f; φ; ψ, а затем и форму Φ, после чего задача решена: проекции силы притяжения кольца на какие угодно астроному оси координат могут быть высчитаны; на такие удобные с точки зрения аналитической геометрии оси координат Halphen делает лишь намек, при чем самые первичные формулы в этих осях координат приводит с ошибкой и с недомолвкой; недомолвка его сводится к тому, что форму φ можно мыслить и в виде $px^2 + qy^2 + rz^2$, но она может получиться и с обратным знаком, т. е. в виде $-px^2 - qy^2 - rz^2$, так как правая часть уравнения дополнительного, как и всякого, конуса равна нулю.

Для введения эллиптических функций, без которых решение поставленной задачи невозможно, Halphen прежде всего пытается выразить текущие координаты поверхности конуса

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} = 0,$$

в функции двух параметров s и $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ так, чтобы $\frac{x^2}{\rho^2}$; $\frac{y^2}{\rho^2}$; $\frac{z^2}{\rho^2}$ были линейными функциями от s:

$$\frac{x^2}{\rho^2} = As + a; \quad \frac{y^2}{\rho^2} = Bs + b; \quad \frac{z^2}{\rho^2} = Cs + c.$$

Отсюда

$$\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q} + \frac{C}{r}\right) s + \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right) = 0$$

и

$$(A+B+C)\,s + a + b + c = 1.$$

Так как эти равенства должны иметь место при всяком значении s, то необходимо с одной стороны

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{q} + \frac{C}{r} = 0, \quad \text{а также } A+B+C=0.$$

Откуда

$$A:B:C = \begin{vmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{p} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{q} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p(r-q) : q(p-r) : r(q-p),$$

а с другой стороны

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 0 \quad \text{и} \quad a+b+c=1.$$

Посмотрим, чему равно выражение $p^2(r-q) + q^2(p-r) + r^2(q-p)$, Это—однородный многочлен 3-ей степени; **при всяком** r он обращается в нуль, если $p=q$, т. е. он делится на $p-q$; также можно убедиться, что он делится на $q-r$ и на $r-p$, т. е. он равен $C(p-q)(q-r)(r-p)$; чтобы узнать C, дадим p; q; r частн. значения, напр., $p=1$; $q=2$; $r=3$. Тогда $p^2(r-q)+q^2(p-r)+r^2(q-p)=1-8+9=2$; с другой стороны $C(p-q)(q-r)(r-p)=C(-1)(-1)(+2)=2C$, так что $C=1$. Итак,

$$p^2(r-q) + q^2(p-r) + r^2(q-p) = -(q-p)(r-q)(p-r).$$

Поэтому мы удовлетворим условиям, наложенным на A; B; C; a; b; c, если возьмем

$$A = \frac{p(r-q)}{(r-q)(p-r)(q-p)}; \quad B = \frac{q(p-r)}{(p-r)(q-p)(r-q)};$$

$$C = \frac{r(q-p)}{(q-p)(r-q)(p-r)};$$

и

$$a = \frac{p^2(r-q)}{-(r-q)(p-r)(q-p)}; \quad b = \frac{q^2(p-r)}{-(p-r)(q-p)(r-q)};$$

$$c = \frac{r^2(q-p)}{-(q-p)(r-q)(p-r)};$$

Или проще

$$a = \frac{p^2}{(p-r)(p-q)}; \quad b = \frac{q^2}{(q-p)(q-r)}; \quad c = \frac{r^2}{(r-q)(r-p)}$$

и тогда

$$\frac{x^2}{\rho^2}=\frac{p\,(r-q)\,(s-p)}{(r-q)\,(p-r)\,(q-p)}=-\frac{p\,(s-p)}{(p-r)\,(p-q)} \text{ и т. д.}$$

Таким образом

$$\frac{x^2}{\rho^2}=-\frac{p\,(s-p)}{(p-r)\,(p-q)};\quad \frac{y^2}{\rho^2}=-\frac{q\,(s-q)}{(q-p)\,(q-r)};\quad \frac{z^2}{\rho^2}=-\frac{r\,(s-r)}{(r-q)\,(r-p)} \tag{83}$$

Логарифмируя два последних выражения и беря от них диференциал, причем для данного конуса переменными считаются лишь y; z; s; ρ, имеем

$$2\frac{dy}{y}=2\frac{d\rho}{\rho}+\frac{ds}{s-q};\quad 2\frac{dz}{z}=2\frac{d\rho}{\rho}+\frac{ds}{s-r}.$$

Вычитая из второго первое, получим

$$2\left(\frac{dz}{z}-\frac{dy}{y}\right)=\frac{2\,(y dz-z dy)}{yz}=ds\left(\frac{1}{s-r}-\frac{1}{s-q}\right)=\frac{(r-q)\,ds}{(s-r)\,(s-q)}$$

Поэтому, на основании (77),

$$dP_x=\frac{1}{2\rho^3}\,x\,\frac{yz}{2}\,\frac{(r-q)\,ds}{(s-r)\,(s-q)}=\frac{1}{4}\,\frac{xyz}{\rho^3}\,\frac{(r-q)\,ds}{(s-r)\,(s-q)}$$

Но из (83) имеем

$$\frac{x^2\,y^2\,z^2}{\rho^6}=\frac{pqr\,(s-p)\,(s-q)\,(s-r)}{(p-q)^2\,(q-r)^2\,(r-p)^2}$$

Полагая

$$\frac{\sqrt{pqr}}{(p-q)\,(q-r)\,(r-p)}=C;\quad \sqrt{4\,(s-p)\,(s-q)\,(s-r)}=S,$$

будем иметь

$$\frac{xyz}{\rho^3}=\frac{CS}{2},$$

а поэтому

$$dP_x=\frac{1}{4}\,C.\frac{S}{2}\,\frac{(r-q)\,(s-p)\,ds}{(s-p)\,(s-q)\,(s-r)}=\frac{1}{4}\,C.\frac{S}{2}\,\frac{(r-q)\,(s-p)\,ds}{\frac{1}{4}\,S^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{C}{S}\,(r-q)\,(s-p)\,ds.$$

Отсюда с круговой перестановкой букв

$$S\,dP_x=\frac{1}{2}\,C\,(r-q)\,(s-p)\,ds$$

$$S\,dQ_y=\frac{1}{2}\,C\,(p-r)\,(s-q)\,ds$$

$$S\,dR_z=\frac{1}{2}\,C\,(q-p)\,(s-r)\,ds.$$

Для того чтобы выразить эти диференциалы через эллиптические функции, положим

$$s-p=\wp(u)-e_\alpha;\quad s-q=\wp(u)-e_\beta;\quad s-z=\wp(u)-e_\gamma \tag{84}$$

Отсюда

$$ds = \wp'(u)\,du;\; S = \sqrt{4\,[\wp(u) - e_\alpha]\,[\wp(u)\,e_\beta]\,[\wp(u) - e_\gamma]} = \wp'(u);\; ds = S du$$

и следовательно

$$\left.\begin{aligned} dP_x &= \frac{1}{2} C(r-q)\,[\wp(u) - e_\alpha]\,du \\ dQ_y &= \frac{1}{2} C(p-r)\,[\wp(u) - e_\beta]\,du \\ dR_z &= \frac{1}{2} C(q-p)\,[\wp(u) - e_\gamma]\,du \end{aligned}\right| \qquad (85)$$

Связь между величинами p; q; r и корнями Weierstrass'овской функции $\wp$ устанавливается просто: из (84) имеем

$$e_\alpha - p = e_\beta - q = e_\gamma - r = \frac{1}{3}\,[e_\alpha + e_\beta + e_\gamma - (p + q + r)] =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(p + q + r),$$

ибо $e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$.

Отсюда

$$e_\alpha = \frac{1}{3}(2p - q - r);\quad e_\beta = \frac{1}{3}(2q - r - p);\quad e_\gamma = \frac{1}{3}(2r - p - q) \qquad (86)$$

После этого необходимо сделать несколько существенных замечаний, так как только что проведенные рассуждения—формального характера и не уясняют, напр., того существенного вопроса, с какими знаками надо брать корни квадратные и как понимать приведенное раньше выражение $+|d\sigma|$, т. е. как написать правую часть, чтобы левая была именно $d\sigma$ в положительном смысле; формулы (83); (84); (85); (86)—точная цитата Halphen'a [Traité des fonctions elliptiques T. II, стр. 316—317].

Посмотрим, как дело обстоит в действительности; прежде всего, для вещественности конуса

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} = 0$$

необходимо, чтобы две из величин p; q; r были одного знака, а одна—другого. Относя конус к главным осям, положим, что ось x параллельна большой оси эллиптического кольца, а положительное ее направление соответствует направлению в перигелий кольца; ось z—перпендикулярна к плоскости кольца и положительное направление ее—к северу (точнее говоря,—глядя с положительного направления оси z на орбиту-кольцо, увидим движение возмущающей планеты против часовой стрелки). Расположение осей—астрономическое, т. е. глядя, напр., с положительного конца оси z, вращение положительного конца оси x до совпадения с положительным концом оси y на 90° будет совершаться против часовой стрелки. Пусть координаты возмущаемой планеты в таких осях координат суть $(o; o; o)$, а плоскость кольца параллельна плоскости xoy и лежит на положительной части оси z, так что, называя координаты возмущаемой планеты $(o; o; \gamma)$ относительно осей координат избранных направлений, но с началом в центре кольца, будем иметь случай $\gamma < o$. Что значит „интегрировать по кольцу"? Это значит, принимая во внимание, что масса в бесконечно малом элементе кольца есть $m' \dfrac{d\sigma}{\pi ab}$, взять сумму $fm' \dfrac{d\sigma}{\pi ab} \cdot \dfrac{x}{\rho^3}$, причем $d\sigma$ должно быть **положительным**; как известно из аналитической геометрии, объем тетраэдра в виде определителя 4-го порядка получается положительным, если координаты вершины написать в 1-ую строку определителя, а остальные вершины, глядя с главной вершины, вписывать их координатами в определитель (при астрономическом расположении осей) **против** часовой стрелки. Это ясно указывает на то, что тут нужно условиться в **направлении** интегрирования; условимся интегрировать по движению возмущающей планеты в ее орбите; тогда объем V тетраэдра, о котором была речь, выйдет положительным, если его писать в виде

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} o & o & o & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ dx & dy & dz & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

а принимая во внимание, что $\gamma < 0$ и что, следовательно, $h = -\gamma$, будем иметь положительное $d\sigma$ в виде

$$d\sigma = -\frac{1}{2\gamma} [x_0 (ydz - zdy) + y_0 (zdx - xdz) + z_0 (xdy - ydx)]$$

и проекции силы притяжения по осям $(X; Y; Z)$ в виде

$$X = -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} (x_0 P_x + y_0 Q_x + z_0 R_x)$$

$$Y = -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} (x_0 P_y + y_0 Q_y + z_0 R_y)$$

$$Z = -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} (x_0 P_z + y_0 Q_z + z_0 R_z),$$

где $P_x; Q_x \ldots R_z$ имеют значения вдвое большие, чем по формулам (77) с интегрированием в указанном направлении; если, как мы предполагаем, проектирующий конус отнесен к главным осям, то будет просто

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} P_x x_0; \\ Y &= -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} Q_y y_0 \\ Z &= -\frac{fm'}{2\pi ab\gamma} R_z . z_0, \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

В формулах (87) P_x; Q_y; R_z—интегралы по всей орбите; но при нашем частном расположении эллиптического кольца $dz=0$; в 1-й четверти орбиты (с положит. направлениями x и y) $x>0$; $dy>0$; $z>0$, так что все элементы интеграла

$$\int \frac{x\,(ydz-zdy)}{\rho^3}$$

отрицательны; во второй четверти $dy<0$ $x<0$ $z>0$ и все элементы интеграла опять отрицательны и сходственно по симметрии равны элементам 1-й четверти

Рассуждая так далее по всем четвертям, убедимся, что интеграл P_x, взятый по всей орбите, равен четырем интегралам P_x, взятым по первой четверти и $P_x<0$; если такое же обследование сделать в части Q_y, то окажется, что в 1-й четверти $dx<0$; $z>0$; $y>0$ и элементы интеграла тоже отрицательны; во 2-й четверти $dx<0$; $z>0$; $y>0$ и элементы интеграла тоже такие же отрицательные; в 3-й четверти $dx>0$; $y<0$; $z>0$ и элементы интеграла опять такие же и отрицательные и т. д.,—короче говоря интеграл Q_y по всей орбите равен четырем интегралам, взятым по 1-й четверти орбиты и $Q_y<0$; рассуждая так же, убедимся, что R_z обладает тем же свойством, и $R_z>0$.

Поэтому в данном частном случае можно утверждать, что

$$\Phi=\frac{fm'}{-\pi ab\gamma}\,[P_x.x_0^2+Q_y y_0^2+R_z.z_0^2], \tag{88}$$

где интегралы P_x; Q_y; R_z распространяются на первую четверть кольца. Halphen рассматривает случай $p<0$; $q<0$; $r>0$, причем, так как $|p|>|q|$, то алгебраически $p<q<r$.

Разбирая в этом предположении уравнения (83), нужно сказать, что для вещественности x; y; z необходимо $s>p$; $s<q$ и конечно $s<r$; сопоставляя это с формулами (84), можно сказать, что во-первых $e_2<e_\beta<e_\gamma$ и, следовательно, $e_\alpha=e_3$; $e_\beta=e_2$; $e_\gamma=e_1$, придерживаясь обычного обозначения корней Weierstrass'a, т. е. $e_1>0$; $e_3<0$; $e_1>e_2>e_3$, и во-вторых $\wp(u)>e_3$ и $\wp(u)<e_2$, так что аргумент u может пробегать значения типа $u=\omega'+$ веществ величина, что вполне правильно указывает Halphen. Далее он говорит (Traité des fonctions elliptiques. T. II. Стр. 318): „On fera le tour complet du cône en faisant varier $u-\omega'$ dans l'etendue d'une periode. 2ω". Это, конечно, в корне неправильно: если $u=\omega+\omega'$, то $\wp(u)=e_2$; если $u=\omega'+2\omega$, то $\wp(u)=e_3$; тогда при $u=\omega'+\omega$; $s-q=0$ и $s=q$, т. е. $y=0$, а если $u=\omega'+2\omega$, то $s=p$ и $x=0$, так что при изменении u на ω пробегается лишь четверть эллипса; таким образом Halphen'у следовало бы сказать в вышеприведенной цитате не „le tour complet", а „le demi-tour". Таким образом, если бы вычислять вековые возмущения по формулам Halphen'a то они оказались бы вдвое менее настоящих их величин; далее Halphen в формуле

$$C=\frac{\sqrt{pqr}}{(p-q)\,(q-r)\,(r-p)}$$

ничего не говорит о том, с каким знаком нужно брать $\sqrt{pqr}$; условимся брать $C>0$; тогда, если интегрировать первую формулу (85) от $u=u_0$ до $u=u_0+2\omega$ (в возрастающем порядке u), то, так как $e_\alpha=e_3$, легко усмотреть, что все элементы интеграла (85) будут положительны, между тем как нужно $P_x<0$.

Следовательно, при наших предположениях будет

$$P_x = -\int C\,(r-q)\,[\wp(u)-e_3]\,du, \tag{89}$$

где интегрирование распространяется на $\frac{1}{4}$ контура кольца, применительно к формуле (88), вспоминая, что здесь P_x—вдвое больше, чем в формулах (77) и (85); откуда получился знак минус, которого нет в формулах (85)? Причина этого—та, что при интегрировании по 1-й четверти переменное u меняется от $\omega+\omega'$ до $2\omega+\omega'$ и $\wp(u)$ от e_2 до e_3, т. е. убывает, так что $\wp'(u)<0$, между тем как в 1-й четверти $x>0$ и $y>0$, а при нашем предположении и $z>0$.

Таким образом вышенаписанная формула

$$\frac{xyz}{\rho^3} = C\cdot\frac{S}{2} = \frac{C}{2}\wp'(u)$$

должна здесь писаться так:

$$\frac{xyz}{\rho^3} = -\frac{C}{2}\wp'(u),$$

а отсюда перемена знака в $dP_x \ldots$ по сравнению с Halphen'ом при нашем расположении осей.

Из формулы (89) сразу вытекает, что

$$2P_x = -\int\limits_u^{u+2\omega} C\,(r-q)\,[\wp(u)-e_3]\,du = -C\,(r-q)\,\{-\zeta(u+2\omega)+$$

$$+\zeta(u)-e_3.2\omega\} = -C\,(r-q)\,\{-2\eta-2\omega\,e_3\} = 2C\,(r-q)\,(\eta+e_3\,\omega)$$

Поэтому

$$P_x = C\,(r-q)\,(\eta+e_3\,\omega) = C\,(r-q)\left\{\eta+p\omega-\frac{p+q+r}{3}\,\omega\right\} =$$

$$= C\eta\,(r-q) - C\,(r-q)\,\frac{p+q+r}{3}\,\omega + C\,(r-q).p\omega$$

Итак

$$\left.\begin{aligned} P_x &= C\eta\,(r-q) - C\,(r-q)\,\frac{p+q+r}{3}\,\omega + C\,(r-q)\,p\omega \\ Q_y &= C\eta\,(p-r) - C\,(p-r)\,\frac{p+q+r}{3}\,\omega + C\,(p-r)\,q\omega \\ R_z &= C\eta\,(q-p) - C\,(q-p)\,\frac{p+q+r}{3}\,\omega + C\,(q-p)\,r\omega \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Умножая равенства (90) соответственно на x_0^2; y_0^2; z_0^2 и складывая, мы на основании (88) получим

$$\Phi = \frac{fm'}{-\pi ab\gamma}\left\{-M\eta-\omega N+\frac{p+q+r}{3}\,\omega M\right\} =$$

$$= \frac{fm'}{\pi ab\gamma}\left\{M\left[\eta-\frac{p+q+r}{3}\,\omega\right]+\omega N\right\} \tag{91}$$

где

$$\left.\begin{aligned} M &= C\,[(q-r)\,x_0^2+(r-p)\,y_0^2+(p-q)\,z_0^2] \\ N &= C\,[(q-r)\,px_0^2+(r-p)\,qy_0^2+(p-q)\,rz_0^2] \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

В дальнейшем будем обозначать

$$k_1 = p + q + r; \quad k_2 = pq + qr + rp; \quad k_2 = pqr \tag{93}$$

Тогда на основании (81) и (82)

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & f \\ k_1^2 - 2k_2 & k_1 & 3 \\ k_1 & 3 & \frac{k_2}{k_3} \end{vmatrix} \tag{94}$$

Второй из перемножаемых определителей равен

$$\frac{1}{pqr}\left[p^2(q-r) + q^2(r-p) + r^2(p-q)\right] = \frac{-1}{k_3}(q-r)(r-p)(p-q);$$

Поэтому равенство (94) перепишется так:

$$-\frac{M}{C}(p-q)(q-r)(r-p) = -\frac{M}{\sqrt{k_3}}(p-q)^2(q-r)^2(r-p)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi & \psi & f \\ k_1^2 - 2k_2 & k_1 & 3 \\ k_1 k_2 & 3k_3 & k_2 \end{vmatrix} \tag{95}$$

Здесь $\sqrt{k_3}$ должно быть взято с плюсом, ибо $C > 0$.

Так как $p - q = e_\alpha - e_\beta$; $q - r = e_\beta - e_\gamma$; $r - p = e_\gamma - e_\alpha$, то

$$(p-q)^2(q-r)^2(r-p)^2 = (e_3 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\Delta = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$$

Если для краткости обозначим, как то делает Halphen,

$$\mu = \frac{1}{16}\frac{\Delta}{\sqrt{k_3}}M,$$

то

$$\mu = -\begin{vmatrix} \varphi & \psi & f \\ k_1^2 - 2k_2 & k_1 & 3 \\ k_1 k_3 & 3k_3 & k_2 \end{vmatrix} = (9k_3 - k_1 k_2)\varphi + (k_1^2 k_2 - 2k_2^2 - 3k_1 k_3)\psi +$$

$$+ f(3k_2 - k_1^2)\,2k_3 \tag{96}$$

Чтобы подойти к выражению формы N, возьмем произведение двух определителей

$$\begin{vmatrix} px^2 & qy^2 & rz^2 \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \\ \frac{q-r}{p} & \frac{r-p}{q} & \frac{p-q}{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & k_1 & 3 \\ \psi & 3 & \frac{k_2}{k_3} \\ \frac{M}{C} & 0 & \sum \frac{q-r}{p} \end{vmatrix} \tag{97},$$

Но

$$\sum \frac{q-r}{p} = \frac{q-r}{p} + \frac{r-p}{q} + \frac{p-q}{r} = \frac{1}{k_3}\{qr(q-r)+rp(r-p)+$$

$$+pq(p-q)\} = \frac{1}{k_3}(q-r)[qr-p(q+r)+p^2] =$$

$$= \frac{1}{k_3}(q-r)(q-p)(r-p) = -\frac{1}{k_3}(p-q)(q-r)(r-p)$$

и кроме того

$$\frac{M}{C} = \frac{\mu}{(p-q)(q-r)(r-p)};$$

Определитель в правой части (97) может быть поэтому написан в виде

$$\frac{1}{(p-q)(q-r)(r-p)}\begin{vmatrix} \varphi & k_1 & 3 \\ \psi & 3 & \dfrac{k_2}{k_3} \\ \mu & 0 & -\dfrac{1}{k_3}\,\dfrac{1}{16}\Delta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k_3(p-q)(q-r)(r-p)}\begin{vmatrix} \varphi & k_1 & 3k_3 \\ \psi & 3 & k_2 \\ \mu & 0 & -\dfrac{1}{16}\Delta \end{vmatrix}$$

Что касается до второго определителя в левой части (97), то он равен

$$\frac{p-q}{qr} - \frac{r-p}{qr} - \frac{p-q}{pr} + \frac{q-r}{pr} + \frac{r-p}{pq} - \frac{q-r}{pq} = \frac{1}{k_3}\{2p^2 - qp - rp +$$

$$+2q^2 - rq - pq + 2r^2 - pr - qr\} = \frac{1}{k_3}\{2(k_1^2 - 2k_2) - 2k_2\} =$$

$$= \frac{1}{k_3}.2(k_1^2 - 3k_2)$$

В таком случае равенство (97) обращается в

$$\frac{N}{C}.\frac{1}{k_3}.2(k_1^2 - 3k_2) = \frac{1}{k_3(p-q)(q-r)(r-p)}\left[\frac{1}{16}\Delta(k_1\psi - 3\varphi) + \right.$$

$$\left. + (k_1 k_2 - 9k_3)\mu\right]$$

Отсюда, вспоминая, что $C = \sqrt{k_3} : [(p-q)(q-r)(r-p)]$,

$$\frac{1}{16}\Delta\frac{N}{\sqrt{k_3}} = \frac{1}{2(k_1^2 - 3k_2)}\left[\frac{1}{16}\Delta(k_1\psi - 3\varphi) + (k_1 k_2 - 9k_3)\mu\right] \quad (98)$$

Инварианты g_2; g_3 в функции k_1; k_2; k_3 получаются очень просто из того соображения, что уравнение $s^3 - k_1 s^2 + k_2 s - k_3 = 0$, корнями которого являются p; q; r постановкой $s = e + \frac{1}{3} k_1$ преобразуется в $e^3 - \frac{1}{4} g_2 e - \frac{1}{4} g_3 = 0$, корнями которого являются e_1; e_2; e_3.

Таким образом

$$\left(e + \frac{1}{3} k_1\right)^3 - k_1 \left(e + \frac{1}{3} k_1\right)^2 + k_2 \left(e + \frac{1}{3} k_1\right) - k_3 = 0,$$

или

$$e^3 + \left(\frac{1}{3} k_1^2 - \frac{2}{3} k_1^2 + k_2\right) e + \left(\frac{1}{27} k_1^3 - \frac{1}{9} k_1^3 + \frac{1}{3} k_1 k_2 - k_3\right) = 0,$$

так что

$$g_2 = \frac{4}{3}(k_1^2 - 3k_2); \quad g_3 = \frac{4}{27}(2k_1^3 - 9k_1 k_2 + 27k_3) \tag{99}$$

Из равенств (99) следует, что

$$2k_1 g_2 - 9g_3 = \frac{8}{3}(k_1^3 - 3k_1 k_2) - \frac{4}{3}(2k_1^3 - 9k_1 k_2 + 27k_3) =$$

$$= 4(k_1 k_2 - 9k_3),$$

т. е. выражение, подходящее под последний коэфициент формулы (98). Заменяя теперь в формуле (98) μ через $\frac{1}{16} \frac{\Delta}{\sqrt{k_3}} M$ и $k_1^2 - 3k_2$ через $\frac{3}{4} g_2$, получим

$$\frac{1}{16} \Delta \frac{N}{\sqrt{k_3}} = \frac{2}{3g_2}\left[\frac{1}{16} \Delta (k_1 \psi - 3\varphi) + \left(\frac{1}{2} k_1 g_2 - \frac{9}{4} g_3\right) \frac{1}{16} \frac{\Delta}{\sqrt{k_3}} M\right],$$

или

$$N = \frac{2\sqrt{k_3}}{3g_2}(k_1 \psi - 3\varphi) + \left(\frac{1}{3} k_1 - \frac{3}{2} \frac{g_3}{g_2}\right) M,$$

или

$$N - \left(\frac{1}{3} k_1 - \frac{3}{2} \frac{g_3}{g_2}\right) M = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{k_3}}{g_2}(k_1 \psi - 3\varphi);$$

подставляя отсюда значение N в (91), получим

$$\Phi = \frac{fm'}{\pi ab\gamma}\left\{M\left(\eta - \frac{3}{2} \frac{g_3}{g_2} \omega\right) + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{k_3}}{g_2} \omega (k_1 \psi - 3\varphi)\right\} \tag{100}$$

Пользуясь теперь формулами (76) и $\Psi(\xi) = \omega \sqrt[4]{g_2} \cdot \sqrt{2}$, равенство (100) напишем в виде

$$\Phi = \frac{fm'}{\pi ab\gamma}\left\{-M \cdot \frac{18 g_3 \Delta}{g_2 \sqrt[4]{g_2} \cdot \sqrt{2}} \Psi''(\xi) + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{k_3}}{g_2} \cdot \frac{k_1 \psi - 3\varphi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{g_2}} \Psi(\xi)\right\}$$

или

$$\Phi = \frac{fm'}{\pi ab\gamma}\left\{\frac{1}{3}(k_1\psi - 3\varphi)\Psi(\xi) + \right.$$

$$\left. - M\frac{18g_3\Delta}{g_2^4\sqrt[4]{g_2}\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{g_2\cdot g_2}}{2\sqrt{k_3}}\Psi'(\xi)\right\}\frac{2\sqrt{k_3}}{\sqrt{2}\,g_2\sqrt[4]{g_2}}$$

Заменяя здесь $M\Delta : 16\sqrt{k_3}$ через μ, получим

$$\Phi = \frac{fm'}{\pi ab\gamma}\left\{\frac{1}{3}(k_1\psi - 3\varphi)\Psi(\xi) - \frac{144g_3}{g_2^3}\mu\Psi'(\xi)\right\}\frac{2\sqrt{k_3}}{\sqrt{2}\,g_2\sqrt[4]{g_2}} \quad (101)$$

Здесь является подозрительным случай $\gamma = 0$, т. е. когда возмущаемая планета окажется в плоскости притягивающего кольца; в дальнейшем увидим, что этот нуль компенсируется множителем $\sqrt{k_3}$ в числителе.

Небезынтересно исследовать, что случится с видом функции Φ, если $\gamma > 0$.

Если плоскость кольца параллельна плоскости xoy, но—в отрицательной области оси z, то положительная величина объема ранее упоминавшегося тетраэдра будет

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 1 \end{vmatrix}$$

т. е. формально с обратным знаком, чем ранее, а поэтому

$$d\sigma = \frac{1}{2\gamma}\left[-x_0(ydz - zdy) - \ldots\right], \text{ ибо теперь } \gamma > 0$$

Формальное выражение $d\sigma$—то же, что и раньше, а поэтому и силы притяжения X; Y; Z формально напишутся так же, как и раньше. Интегрирование ведется, как и раньше, по кольцу в направлении движения планеты. Рассматривая теперь интеграл

$$\int\frac{x(ydz - zdy)}{\rho^3},$$

можно сказать, что в 1-й четверти $x > 0$; $z < 0$; $dy > 0$, так что интеграл P_x на этот раз > 0. Введение эллиптических функций совершится буквально по тем же формулам, что и раньше, но только в виду положительности P_x придется сказать, что на этот раз

$$P_x = +\int C(r - q)\,[\wp(u) - e_3]\,du;$$

одним словом P_x; Q_y; R_z напишутся с обратным знаком, чем ранее, и с обратным же знаком напишется и форма Φ (101), причем $\sqrt{k_3}$ тоже с положительным знаком.

Теперь можно прямо перейти к аппарату рабочих формул. Возьмем начало координат в центре притягивающего кольца, а направление осей, как указано ранее: ось x-в перигелий и т. д. Пусть координаты притягиваемой точки в этой системе будут α; β; γ. Тогда уравнение конуса, проектирующего кольцо из точки (α; β; γ), будет

$$(\xi-\alpha):(\alpha-x_0)=(\eta-\beta):(\beta-y_0)=(\zeta-\gamma):\gamma$$

причем координаты x_0; y_0 кольца удовлетворяют уравнению $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Из только что написанной пропорции имеем:

$$x_0=\alpha-\frac{(\xi-\alpha)\gamma}{\zeta-\gamma}=\frac{\alpha\zeta-\gamma\xi}{\zeta-\gamma};\qquad y_0=\beta-\frac{(\eta-\beta)\gamma}{\zeta-\gamma}=\frac{\beta\zeta-\eta\gamma}{\zeta-\gamma},$$

так что

$$\left[\frac{\alpha\zeta-\gamma\xi}{a(\zeta-\gamma)}\right]^2+\left[\frac{\beta\zeta-\gamma\eta}{b(\zeta-\gamma)}\right]^2=1,$$

или
$$b^2(\alpha\zeta-\gamma\xi)^2+a^2(\beta\zeta-\eta\gamma)^2=a^2\,b^2(\zeta-\gamma)^2.$$

Если сделаем преобразование координат $\xi=x+\alpha$; $\eta=y+\beta$; $\zeta=z+\gamma$, т. е. перенесем начало координат в вершину конуса и сохраним прежнее направление осей, то уравнение конуса будет

$$b^2[\alpha z+\alpha\gamma-\gamma x-\alpha\gamma]^2+a^2[\beta z+\beta\gamma-y\gamma-\beta\gamma]^2=a^2\,b^2\,z^2,$$

или

$$\frac{(\alpha z-\gamma x)^2}{a^2\gamma^2}+\frac{(\beta z-\gamma y)^2}{b^2\gamma^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$$ (делитель γ^2 для однородности дробей). Если взять частный случай $\alpha=0$; $\beta=0$, то получается $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$; ранее поставленное условие, чтобы в уравнении $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=0$, было $p<q<r$ и $p<0$; $q<0$, требует форму f взять не в виде левой части вышенаписанного уравнения, а с обратным знаком, т. е. взять

$$f=\frac{z^2}{\gamma^2}-\frac{(\alpha z-\gamma x)^2}{a^2\gamma^2}-\frac{(\beta z-\gamma y)^2}{b^2\gamma^2}.$$

Уравнение касательной плоскости к нашему конусу в точке (x'; y'; z') будет

$$z\frac{z'}{\gamma^2}-\frac{\alpha^2zz'}{a^2\gamma^2}-\frac{\gamma^2xx'}{a^2\gamma^2}-\frac{\beta^2zz'}{b^2\gamma^2}-\frac{\gamma^2yy'}{b^2\gamma^2}+\frac{\alpha\gamma z'x}{a^2\gamma^2}+\frac{\alpha\gamma zx'}{a^2\gamma^2}+$$
$$+\frac{\beta\gamma yz'}{b^2\gamma^2}+\frac{\beta\gamma y'z}{b^2\gamma^2}=0$$

или

$$\left(\frac{z'}{\gamma^2}-\frac{\alpha^2z'}{a^2\gamma^2}-\frac{\beta^2z'}{b^2\gamma^2}+\frac{\alpha\gamma x'}{a^2\gamma^2}+\frac{\beta\gamma}{b^2\gamma^2}y'\right)z+\left(-\frac{\gamma^2x'}{a^2\gamma^2}+\frac{\alpha\gamma z'}{a^2\gamma^2}\right)x+$$
$$+\left(-\frac{\gamma^2y'}{b^2\gamma^2}+\frac{\beta\gamma z'}{b^2\gamma^2}\right)y=0.$$

Означая тогда через ξ; η; ζ текущие координаты дополнительного конуса, будет иметь

$$\xi = -\frac{\gamma^2 x'}{a^2\gamma^2} + \frac{\alpha\gamma z'}{a^2\gamma^2};$$

$$\eta = -\frac{\gamma^2 y'}{b^2\gamma^2} + \frac{\beta\gamma z'}{b^2\gamma^2};$$

$$\zeta = \frac{z'}{\gamma^2} - \frac{\alpha^2 z'}{a^2\gamma^2} - \frac{\beta^2 z'}{b^2\gamma^2} + \frac{\alpha\gamma x'}{a^2\gamma^2} + \frac{\beta\gamma y'}{b^2\gamma^2};$$

Умножая первое из только что написанных уравнений на α; второе—на β; третье—на γ и складывая, имеем

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \frac{\alpha^2\gamma z'}{a^2\gamma^2} + \frac{\beta^2\gamma z'}{b^2\gamma^2} + \frac{z'}{\gamma} - \frac{\alpha^2 z'\gamma}{a^2\gamma^2} - \frac{\beta^2 z'\gamma}{b^2\gamma^2} = \frac{z'}{\gamma}.$$

Подставляя это значение $z':\gamma$ в первое и второе из трех вышенаписанных уравнений, получим

$$\frac{\gamma^2 x'}{a^2\gamma^2} = \frac{x'}{a^2} = -\xi + \frac{\alpha}{a^2}[\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta];$$

$$\frac{\gamma^2 y'}{b^2\gamma^2} = \frac{y'}{b^2} = -\eta + \frac{\beta}{b^2}[\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta],$$

так что

$$x' = \alpha(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) - a^2\xi$$
$$y' = \beta(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) - b^2\eta$$
$$z' = \gamma(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

Отсюда $az' - \gamma x' = a^2\gamma\xi$; $\beta z' - \gamma y' = b^2\gamma\eta$; подставляя это в уравнение

$$z'^2:\gamma^2 - (az' - \gamma x')^2 : a^2\gamma^2 - (\beta z' - \gamma y')^2 : b^2\gamma^2 = 0,$$

имеем

$$(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2 = 0,$$

или, переходя к обычным координатам,

$$\varphi = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2,$$

так как при $\alpha = \beta = 0$ в соответствии с $f = \frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ должно быть

$$\varphi = \gamma^2 z^2 - a^2x^2 - b^2y^2.$$

Итак

$$\left.\begin{aligned} f = \frac{z^2}{\gamma^2} - \frac{(az - \gamma x)^2}{a^2\gamma^2} - \frac{(\beta z - \gamma y)^2}{b^2\gamma^2}; \quad \varphi = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 \\ \psi = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}\right\} \quad (102)$$

Остается посмотреть, как выражаются k_1; k_2; k_3 через a; b; α; β; γ; из аналитической геометрии известно, что если общее уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \ldots = 0$$

отнести к центру и главным осям, то коэфициенты при квадратах координат будут корнями кубического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0;$$

в данном случае корнями такого уравнения будут $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{q}$; $\frac{1}{r}$, так что $s_1+s_2+s_3=\frac{k_2}{k_3}$; $s_1 s_2+s_2 s_3+s_3 s_1=\frac{k_1}{k_3}$; $s_1 s_2 s_3=\frac{1}{k_3}$, а самое уравнение напишется

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{a^2}-s; & 0; & +\frac{\alpha}{a^2\gamma} \\ 0; & -\frac{1}{b^2}-s; & +\frac{\beta}{b^2\gamma} \\ +\frac{\alpha}{a^2\gamma}; & +\frac{\beta}{b^2\gamma}; & +\frac{1}{\gamma^2}-\frac{\alpha^2}{a^2\gamma^2}-\frac{\beta^2}{b^2\gamma^2}-s \end{vmatrix} = 0$$

Если раскрыть этот определитель, то получится

$$-s^3+s^2\left[\frac{1}{\gamma^2}-\frac{\alpha^2}{a^2\gamma^2}-\frac{\beta^2}{b^2\gamma^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right]+s\left[\frac{1}{a^2\gamma^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{b^2\gamma^2}-\frac{\alpha^2}{a^2b^2\gamma^2}-\frac{\beta^2}{a^2b^2\gamma^2}-\frac{1}{a^2b^2}\right]+\frac{1}{a^2b^2\gamma^2}=0$$

Отсюда сразу видно, что

$$\frac{k_2}{k_3}=\frac{1}{a^2b^2\gamma^2}(a^2b^2-\alpha^2b^2-\beta^2a^2-b^2\gamma^2-a^2\gamma^2);$$

$$\frac{k_1}{k_3}=\frac{1}{a^2b^2\gamma^2}[\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2-b^2]; \quad \frac{1}{k_3}=\frac{1}{a^2b^2\gamma^2};$$

Отсюда очень просто

$$k_1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(a^2+b^2); \quad k_2=a^2b^2-(\alpha^2b^2+\beta^2a^2+b^2\gamma^2+a^2\gamma^2);$$
$$k_3=a^2b^2\gamma^2.$$

В выражении (101) $\sqrt{k_3}$ берется с положительным знаком, следовательно, при $\gamma<0$; $\sqrt{k_3}=-ab\gamma$, а при $\gamma>0$; $\sqrt{k_3}=+ab\gamma$; так как фигурная скобка в (101) при $\gamma>0$ имеет обратный знак, то умозаключаем, что всегда

$$\Phi=\frac{fm'}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{g_2\sqrt[4]{g_2}}\left\{\frac{144g_3}{g_2{}^3}\mu\Psi'(\xi)-\frac{1}{3}(k_1\psi-3\varphi)\Psi(\xi)\right\} \tag{103}$$

Halphen пишет эту формулу в виде

$$h\Phi=\frac{1}{g_2}\sqrt[4]{\frac{4k_3{}^2}{g_2}}\left[\frac{1}{3}(k_1\psi-3\varphi)\Psi(\xi)-\frac{144g_3}{g_2{}^3}\mu\Psi'(\xi)\right];$$

в правой части лишний множитель ab; нет π, f и неясен знак.

Отсутствие ab и π может считаться понятным: Halphen за массу элемента вместе с коэфициентом всемирного тяготения принимает площадь $d\sigma$ бесконечно малого сектора; но отсутствие четких указаний насчет знака—несомненно недостаток Halphen'а; больше того: Halphen считает h просто расстоянием и как будто бы величиной существенно положительной, а о знаке $\sqrt[4]{4k_3^2}$ ничего не говорит; не разобравшись в сущности дела, можно взять формулу Halphen'а с обратным знаком.

На основе (103) можно составить рабочие формулы для вычисления вековых возмущений.

Пусть

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\pi g_2^4\sqrt[4]{g_2}}\cdot 144 g_3\,\Psi'(\xi);\qquad B=\frac{\sqrt{2}}{\pi g_2\sqrt[4]{g_2}}\Psi(\xi)\tag{104}$$

Тогда формула (103) перепишется в виде

$$\Phi=fm'\left[\mu A-\frac{1}{3}(k_1\psi-3\varphi)\,B\right]\tag{103'}$$

Отберем теперь в форме μ коэфициенты при x^2; y^2; z^2; xy; yz; zx; тогда по формуле (96) и (99) коэфициент в μ при x^2 равен

$$(9k_3-k_1k_2)(\alpha^2-a^2)+k_1(k_1k_2-3k_3)-2k_2^2+\frac{1}{a^2}\frac{3}{2}g_2k_3;$$

y^2 ... $(9k_3-k_1k_2)(\beta^2-b^2)+k_1(k_1k_2-3k_3)-2k_2^2+\frac{1}{b^2}\frac{3}{2}g_2k_3;$

z^2 ... $(9k_3-k_1k_2)\gamma^2+k_1(k_1k_2-3k_3)-2k_2^2+\frac{3g_2}{2}(a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2);$

$2xy$ .. $(9k_3-k_1k_2)\alpha\beta+$ ничего

$2xz$ .. $(9k_3-k_1k_2)\alpha\gamma+$ ничего $-\frac{3g_2}{2}\alpha b^2\gamma$

$2yz$ .. $(9k_3-k_1k_2)\beta\gamma+$ ничего $-\frac{3g_2}{2}\beta a^2\gamma.$

После этого отберем в форме $\varphi-\frac{1}{3}k_1\psi$ такие же коэфициенты:

коэфициент $b\left(\varphi-\frac{1}{3}k_1\psi\right)$ при x^2 равен $(\alpha^2-a^2)-\frac{1}{3}k_1;$

. . . . y^2 . . . $(\beta^2-b^2)-\frac{1}{3}k_1,$

. . . . z^2 . . . . $+\gamma^2-\frac{1}{3}k_1;$

. . . . $2xy$ . . . . $+\alpha\beta;$

. . . . $2xz$ . . . . $+\alpha\gamma;$

. . . . $2yz$ . . . . $+\beta\gamma;$

если вышенаписанные коэфициенты μ в порядке, написанном только что, обозначим соответственно a_{11}; a_{22}; a_{33}; a_{12}; a_{13}; a_{23}, а коэфициенты в $\varphi - \frac{1}{3} k_1 \psi$ также обозначим соответственно a'_{11}; a'_{22}; a'_{33}; a'_{12}; a'_{13}; a'_{23} и затем положим

$$A_{ik} = a_{ik} A + a'_{ik} B,$$

то проекции силы притяжения на оси x; y; z будут

$$\left.\begin{array}{c} X = 2fm' (A_{11} x + A_{12} y + A_{13} z); \quad Y = 2fm' (A_{21} x + A_{22} y + A_{23} z); \\ Z = 2fm' (A_{31} x + A_{32} y + A_{33} z); \end{array}\right\} \quad (105)$$

причем в правых частях этих равенств вместо x; y; z надо подставить координаты солнца по отношению к возмущаемой планете в выбранных осях координат.

На основании вышеизложенного представляется следующий путь для вычисления вековых возмущений 1-го порядка.

По данным элементам орбит возмущающей и возмущаемой планеты прежде всего решаем сферический треугольник, образованный плоскостями орбит и эклиптикой (если элементы даны в системе эклиптики) или экватором (если элементы даны в системе экватора); в этом треугольнике известна сторона, равная разности долгот восходящих узлов, и два прилежащих угла, из которых один есть наклон орбиты, а другой равен 180° минус наклон орбиты; из решения этого треугольника (решение проще всего вести по аналогиям Непера) находим наклон плоскостей орбит друг к другу, который назовем J, а также расстояния от общей точки орбит (той или другой) до восходящих узлов; после этого орбиту возмущающей планеты принимаем за основную плоскость, перигелий ее за начало счета дуг, при чем направление счета совпадает с направлением движения по орбите у возмущающей планеты; тогда простыми арифметическими действиями легко найти долготу восходящего узла возмущаемой орбиты по отношению к возмущающей; долготу эту обозначим через Ω; также арифметическими действиями легко будет узнать расстояние перигелия возмущаемой орбиты от только что упомянутого узла; это расстояние обозначим Φ. После этого на орбите возмущаемой планеты берется 12 положений ее (можно 8 или 16) с равностоящими эксцентрическими аномалиями ε, т. е. при $\varepsilon = 0°$; 30°; 60°..... 330° и для каждого положения вычисляется радиус-вектор r и истинная аномалия w по формулам

$$\sqrt{r} \sin \frac{w}{2} = \sqrt{2a \sin^2 \left(45° + \frac{1}{2} \varphi\right)} \sin \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sqrt{2a} \sin \left(45° + \frac{1}{2} \varphi\right) \sin \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{w}{2} = \sqrt{2a \cos^2 \left(45° + \frac{1}{2} \varphi\right)} \cos \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sqrt{2a} \cos \left(45° + \frac{1}{2} \varphi\right) \cos \frac{\varepsilon}{2};$$

а затем для каждого из этих 12 положений прямоугольные Декартовы гелиоцентрические координаты в принятой системе координат по формулам:

$$x = r\,[\cos\Omega \cos(\Phi + w) - \sin\Omega \sin(\Phi + w) \cos J];$$
$$y = r\,[\sin\Omega \cos(\Phi + w) + \cos\Omega \sin(\Phi + w) \cos J];$$
$$z = r \sin(\Phi + w) \sin J,$$

каковые легко приводятся в логарифмический вид посредством вспомогательного угла:

$$m \sin M = \sin(\Phi + w) \cos J; \qquad m \cos M = \cos(\Phi + w) \qquad [m > 0]$$

и тогда

$$x = r\,m \cos(M + \Omega); \quad y = r.m \sin(M + \Omega); \quad z = r.\sin(\Phi + w) \sin J;$$

попутно тут же находятся направляющие косинусы радиуса-вектора по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Вместе с этим для дальнейшего находят направляющие косинусы прямой перпендикулярной к радиусу вектору в сторону движения возмущаемой планеты и лежащей в плоскости ее орбиты, что достигается заменой в предыдущих выражениях $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ w через $w + 90°$, т. е. по формулам

$$n \sin N = \cos(\Phi + w) \cos J; \; n \cos N = - \sin(\Phi + w); \; \cos\alpha' = n \cos(N + \Omega);$$
$$\cos\beta' = n \sin(N + \Omega); \quad \cos\gamma' = \cos(\Phi + w) \sin J.$$

Наконец находят направляющие косинуса перпендикуляра к плоскости возмущаемой орбиты, направляемого к северу (точнее: так, что, глядя с положительного конца этого перпендикуляра на плоскость орбиты, движение возмущаемой планеты увидим против часовой стрелки); эти косинусы находятся по формулам:

$$\cos\alpha'' = + \sin\Omega \sin J; \quad \cos\beta'' = - \cos\Omega \sin J; \quad \cos\gamma'' = + \cos J;$$

эти три последних косинуса конечно одинаковы для всех 12 положений. Затем находят $\alpha = x + ae$; $\beta = y$; $\gamma = z$, где a и e большая полуось и эксцентриситет орбиты возмущающей планеты. После того как найдены α; β; γ, по формулам

$$k_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2); \quad k_2 = a^2 b^2 - (\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 + a^2 \gamma^2 + b^2 \gamma^2);$$
$$k_3 = a^2 b^2 \gamma^2$$

находят k_1; k_2; k_3, а затем по формулам (99)

$$g_2 = \frac{4}{3}(k_1^2 - 3k_2); \quad g_3 = \frac{4}{27}(2k_1^3 - 9k_1 k_2 + 27k_3)$$

находят g_2 и g_3 и $\xi = 1 - \dfrac{1}{J} = 27g_3^2 : g_2^3$; далее, при помощи нижеприводимых таблиц находят $\Psi(\xi)$ и $\Psi'(\xi)$, множители

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\pi g_2^4 \sqrt[4]{g_2}} . 144 g_3 \Psi'(\xi); \qquad B = \frac{\sqrt{2}}{\pi g_2 \sqrt[4]{g_2}} \Psi(\xi)$$

и серию коэфициентов

$$a_{11} = (9k_3 - k_1 k_2)(\alpha^2 - a^2) + k_1 (k_1 k_2 - 3k_3) - 2k_2^2 + \frac{3}{2} g_2 b^2 \gamma^2;$$

$$a_{22} = (9k_3 - k_1 k_2)(\beta^2 - b^2) + k_1 (k_1 k_2 - 3k_3) - 2k_2^2 + \frac{3}{2} g_2 a^2 \gamma^2;$$

$$a_{33} = (9k_3 - k_1 k_2)\gamma^2 + k_1 (k_1 k_2 - 3k_3) - 2k_2^2 + \frac{3}{2} g_2 (\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - a^2 b^2);$$

$$a_{12} = (9k_3 - k_1 k_2)\alpha\beta;$$

$$a_{23} = (9k_3 - k_1 k_2)\beta\gamma - \frac{3g_2}{2} a^2 \beta\gamma;$$

$$a_{31} = (9k_3 - k_1 k_2)\gamma\alpha - \frac{3g_2}{2} b^2 \gamma\alpha;$$

$$a'_{11} = \alpha^2 - a^2 - \frac{1}{3} k_1; \quad a'_{22} = \beta^2 - b^2 - \frac{1}{3} k_1;$$

$$a'_{33} = \gamma^2 - \frac{1}{3} k_1; \quad a'_{12} = \alpha\beta; \quad a'_{23} = \beta\gamma; \quad a'_{31} = \gamma\alpha,$$

Из них составляются комбинации

$$A_{ik} = a_{ik} A + a'_{ik} B \dots (i;\ k = 1;\ 2;\ 3),$$

и проекции силы притяжения на оси x; y; z будут

$$P_x = 2fm' (A_{11} x_0 + A_{12} y_0 + A_{13} z_0);$$
$$P_y = 2fm' (A_{21} x_0 + A_{22} y_0 + A_{23} z_0);$$
$$P_z = 2fm' (A_{31} x_0 + A_{32} y_0 + A_{33} z_0);$$

причем $x_0 = -x$; $y_0 = -y$; $z_0 = -z$, где x; y; z суть координаты (гелиоцентрические), уже вычисленные по формулам

$$x = r\, m \cos(M + \Omega) \text{ и т. д.}$$

Наконец проекции возмущающей силы на радиус-вектор, на перпендикуляр к нему в плоскости орбиты в сторону движения возмущаемой планеты и на перпендикуляр к плоскости орбиты (к северу) соответственно будут

$$S = P_x \cos\alpha + P_y \cos\beta + P_z \cos\gamma;$$
$$T = P_x \cos\alpha' + P_y \cos\beta' + P_z \cos\gamma';$$
$$W = P_x \cos\alpha'' + P_y \cos\beta'' + P_z \cos\gamma'';$$

вот и все для вычисления S; T; W.

Вычисления после того, как найдены x; y; z; $\cos\alpha$; $\cos\beta \dots \cos\gamma''$, ведутся исключительно на арифмометре, что, конечно, сильно ускоряет дело. Обилия и пестроты в буквах нет; целые комбинации, как например $9k_3 - k_1 k_2$; $k_1 k_2 - 3k_3$, повторяются; того же нельзя сказать о формулах Hill'a и Callandreau, где почти все пропитано тригонометрическими величинами, так что если даже там вести вычисления с арифмометром, то надо под руками иметь таблицы натуральных тригонометрических величин и еще из таблиц интерполировать эти величины.

Мною вышеприведенный аппарат формул был применен к вычислению вековых возмущений Цереры (1) от восьми влиятельных планет; прежде чем приводить результаты своих вычислений, приведем таблицы, которые облегчают нахождение $\Psi(\xi)$ и $\Psi'(\xi)$.

ξ	$F\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)$					$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right)$				
0.00	1.00000000					1.00000000				
		358661					69802			
0.01	1.00358661		4422			1.00069802		725		
		363083		98			70527		16	
0.02	1.00721744		4520		2	1.00140329		741		−3
		367603		100			71268		13	
0.03	1.01089347		4620		5	1.00211597		754		+6
		372223		105			72022		19	
0.04	1.01461570		4725		3	1.00283619		773		−5
		376948		108			72795		14	
0.05	1.01838518		4833		2	1.00356414		787		+3
		381781		110			73582		17	
0.06	1.02220299		4943		5	1.00429996		804		+3
		386724		115			74386		20	
0.07	1.02607023		5058		5	1.00504382		824		−4
		391782		120			75210		16	
0.08	1.02998805		5178		1	1.00579592		840		+2
		396960		121			76050		18	
0.09	1.03395765		5299		8	1.00655642		858		+4
		402259		129			76908		22	
0.10	1.03798024		5428		2	1.00732550		880		−4
		407687		131			77788		18	
0.11	1.04205711		5559		5	1.00810338		898		+3
		413246		136			78686		21	
0.12	1.04618957		5695		5	1.00889024		919		0
		418941		141			79605		21	
0.13	1.05037898		5836		6	1.00968629		940		+2
		424777		147			80545		23	
0.14	1.05462675		5983		4	1.01049174		963		0
		430760		151			81508		23	
0.15	1.05893435		6134		8	1.01130682		986		0
		436894		159			82494		23	
0.16	1.06330329		6293		3	1.01213176		1009		+3
		443187		162			83503		26	
0.17	1.06773516		6455		7	1.01296679		1035		−3
		449642		169			84538		23	
0.18	1.07223158		6624		9	1.01381217		1058		+6
		456266		178			85596		29	
0.19	1.07679424		6802		3	1.01466813		1087		−3
		463068		181			86683		26	
0.20	1.08142492		6983		11	1.01553496		1113		+3
		470051		192			87796		29	
0.21	1.08612543		7175		4	1.01641292		1142		+1
		477226		196			88938		30	
0.22	1.09089769		7371		12	1.01730230		1172		+1
		484597		208			90110		31	
0.23	1.09574366		7579		5	1.01820340		1203		0
		492176		213			91313		31	
0.24	1.10066542		7792		10	1.01911653		1234		+3
		499968		223			92547		34	
0.25	1.10566510		8015		11	1.02004200		1268		0
		507983		234			93815		34	
0.26	1.11074493		8249		8	1.02098015		1302		+4
		516232		242			95117		38	
0.27	1.11590725		8491		12	1.02193132		1340		−2
		524723		254			96457		36	
0.28	1.12115448		8745		8	1.02289589		1376		+3
		533468		262			97833		39	

ξ	$F\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)$					$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right)$				
0.29	1.12648916		9007		17	1.02387422		1415		+3
		542475		279			99248		42	
0.30	1.13191391		9286		9	1.02486670		1457		+1
		551761		286			100705		43	
0.31	1.13743152		9572		18	1.02587375		1500		+1
		561333		304			102205		44	
0.32	1.14304485		9876		11	1.02689580		1544		+2
		571209		315			103749		46	
0.33	1.14875694		10191		16	1.02793329		1590		+4
		581400		331			105339		50	
0.34	1.15457094		10522		15	1.02898668		1640		+1
		591922		346			106979		51	
0.35	1.16049016		10868		19	1.03005647		1691		+3
		602790		365			108670		54	
0.36	1.16651806		11233		15	1.03114317		1745		+1
		614023		380			110415		55	
0.37	1.17265829		11613		22	1.03224732		1800		+4
		625636		402			112215		59	
0.38	1.17891465		12015		19	1.03336947		1859		+3
		637651		421			114074		62	
0.39	1.18529116		12436		23	1.03451021		1921		+4
		650087		444			115995		66	
0.40	1.19179203		12880		21	1.03567016		1987		+1
		662967		465			117982		67	
0.41	1.19842170		13345		27	1.03684998		2054		+4
		676312		492			120036		71	
0.42	1.20518482		13837		27	1.03805034		2125		+7
		690149		519			122161		78	
0.43	1.21208631		14356		28	1.03927195		2203		0
		704505		547			124364		78	
0.44	1.21913136		14903		32	1.04051559		2281		+7
		719408		579			126645		85	
0.45	1.22632544		15482		33	1.04178204		2366		+3
		734890		612			129011		88	
0.46	1.23367434		16094		34	1.04307215		2454		+7
		750984		646			131465		95	
0.47	1.24118418		16740		41	1.04438680		2549		+4
		767724		687			134014		99	
0.48	1.24886142		17427		42	1.04572694		2648		+6
		785151		729			136662		105	
0.49	1.25671293		18156			1.04709356		2753		
		803307					139415			
0.50	1.26474600					1.04848771				

x	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$				x	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$			
0.00	1.00000000				0.07	1.00249851		302	
		34856					36856		4
0.01	1.00034856		271		0.08	1.00286707		306	
		35127		5			37162		6
0.02	1.00069983		276		0.09	1.00323869		312	
		35403		4			37474		5
0.03	1.00105386		280		0.10	1.00361343		317	
		35683		6			37791		8
0.04	1.00141069		286		0.11	1.00399134		325	
		35969		4			38116		5
0.05	1.00177038		290		0.12	1.00437250		330	
		36259		5			38446		6
0.06	1.00213297		295		0.13	1.00475696		336	
		36554		7			38782		6

x	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$			
0.14	1.00514478		342	
		39124		9
0.15	1.00553602		351	
		39475		5
0.16	1.00593077		356	
		39831		8
0.17	1.00632908		364	
		40195		7
0.18	1.00673103		371	
		40566		9
0.19	1.00713669		380	
		40946		5
0.20	1.00754615		385	
		41331		11
0.21	1.00795946		396	
		41727		8
0.22	1.00837673		404	
		42131		7
0.23	1.00879804		411	
		42542		10
0.24	1.00922346		421	
		42963		11
0.25	1.00965309		432	
		43395		7
0.26	1.01008704		439	
		43834		11
0.27	1.01052538		450	
		44284		11
0.28	1.01096822		461	
		44745		11
0.29	1.01141567		472	
		45217		10
0.30	1.01186784		482	
		45699		12
0.31	1.01232483		494	
		46193		13
0.32	1.01278676		507	
		46700		11

x	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$			
0.33	1.01325376		518	
		47218		14
0.34	1.01372594		532	
		47750		14
0.35	1.01420344		546	
		48296		13
0.36	1.01468640		559	
		48855		15
0.37	1.01517495		574	
		49429		15
0.38	1.01566924		589	
		50018		17
0.39	1.01616942		606	
		50624		16
0.40	1.01667566		622	
		51246		18
0.41	1.01718812		640	
		51886		17
0.42	1.01770698		657	
		52543		20
0.43	1.01823241		677	
		53220		19
0.44	1.01876461		696	
		53916		22
0.45	1.01930377		718	
		54634		21
0.46	1.01985011		739	
		55373		23
0.47	1.02040384		762	
		56135		25
0.48	1.02096519		787	
		56922		24
0.49	1.02153441		811	
		57733		
0.50	1.02211174			

x	$F'\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; x\right)$						$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; x\right)$				
0.00	0.35648148						0.06944444				
		437436						71775			
0.01	0.36085584		9613				0.07016219		1475		
		447049		309				73250		45	
0.02	0.36532633		9922		15		0.07089469		1520		+4
		456971		324		−5		74770		49	
0.03	0.36989604		10246		10		0.07164239		1569		0
		467217		334		+9		76339		49	
0.04	0.37456821		10580		19		0.07240578		1618		+3
		477797		353		−7		77957		52	
0.05	0.37934618		10933		12		0.07318535		1670		+2
		488730		365		+7		79627		54	
0.06	0.38423348		11298		19		0.07398162		1724		+3
		500028		384		−5		81351		57	
0.07	0.38923376		11682		14		0.07479513		1781		0
		511710		398		+8		83132		57	
0.08	0.39435086		12080		22		0.07562645		1838		+7
		523790		420		−5		84970		64	
0.09	0.39958876		12500		17		0.07647615		1902		−2
		536290		437		+2		86872		62	

ξ	$F'\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)$						$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right)$				
0.10	0.40495166		12937		19		0.07734487		1964		+7
		549227		456		+7		88836		69	
0.11	0.41044393		13393		26		0.07823323		2033		0
		562620		482		−8		90869		69	
0.12	0.41607013		13875		18		0.07914192		2102		+6
		576495		500		+8		92971		75	
0.13	0.42183508		14375		26		0.08007163		2177		+1
		590870		526		+2		95148		76	
0.14	0.42774378		14901		28		0.08102311		2253		+4
		605771		554		−5		97401		80	
0.15	0.43380149		15455		23		0.08199712		2333		+6
		621226		577		+8		99734		86	
0.16	0.44001375		16032		31		0.08299446		2419		+2
		637258		608		0		102153		88	
0.17	0.44638633		16640		31		0.08401599		2507		+6
		653898		639		+2		104660		94	
0.18	0.45292531		17279		33		0.08506259		2601		+3
		671177		672		−1		107261		97	
0.19	0.45963708		17951		32		0.08613520		2698		+6
		689128		704		+9		109959		103	
0.20	0.46652836		18655		41		0.08723479		2801		+4
		707783		745		−6		112760		107	
0.21	0.47360619		19400		35		0.08836239		2908		+9
		727183		780		+12		115668		116	
0.22	0.48087802		20180		47		0.08951907		3024		+1
		747363		827		−7		118692		117	
0.23	0.48835165		21007		40		0.09070599		3141		+11
		768370		867		+12		121833		128	
0.24	0.49603535		21874		52		0.09192432		3269		+4
		790244		919		−2		125102		132	
0.25	0.50393779		22793		50		0.09317534		3401		+9
		813037		967		+7		128503		141	
0.26	0.51206816		23760		57		0.09446037		3542		+5
		836797		1024		+1		132045		146	
0.27	0.52043613		24784		58		0.09578082		3688		+13
		861581		1082		+6		135733		159	
0.28	0.52905194		25866		64		0.09713815		3847		+4
		887447		1146		+3		139580		163	
0.29	0.53792641		27012		67		0.09853395		4010		+13
		914459		1213		+5		143590		176	
0.30	0.54707100		28225		72		0.09996985		4186		+9
		942684		1285		+7		147776		185	
0.31	0.55649784		29510		79		0.10144761		4371		+11
		972194		1364		+7		152147		196	
0.32	0.56621978		30874		86		0.10296908		4567		+12
		1003068		1450		+2		156714		208	
0.33	0.57625046		32324		88		0.10453622		4775		+13
		1035392		1538		+11		161489		221	
0.34	0.58660438		33862		99		0.10615111		4996		+14
		1069254		1637		+8		166485		235	
0.35	0.59729692		35499		107		0.10781596		5231		+15
		1104753		1744		+7		171716		250	
0.36	0.60834445		37243		114		0.10953312		5481		+16
		1141996		1858		+8		177197		266	
0.37	0.61976441		39101		122		0.11130509		5747		+16
		1181097		1980		+16		182944		282	
0.38	0.63157538		41081		138		0.11313453		6029		+21
		1222178		2118		+6		188973		303	
0.39	0.64379716		43199		144		0.11502426		6332		+20
		1265377		2262		+15		195305		323	
0.40	0.65645093		45461		159		0.11697731		6655		+22
		1310838		2421		+14		201960		345	
0.41	0.66955931		47882		173		0.11899691		7000		+24
		1358720		2594		+16		208960		369	

ξ	$F'\left(\frac{7}{12}, \frac{11}{12}; \frac{3}{2}; \xi\right)$						$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \xi\right)$				
0.42	0.68314651		50476		189		0.12108651		7369		+27
		1409196		2783		+17		216329		396	
0.43	0.69723847		53259		206		0.12324980		7765		+28
		1462455		2989		+17		224094		424	
0.44	0.71186302		56248		223		0.12549074		8189		+32
		1518703		3212		+27		232283		456	
0.45	0.72705005		59460		250		0.12781357		8645		+34
		1578163		3462		+18		240928		490	
0.46	0.74283168		62922		268		0.13022285		9135		+40
		1641085		3730		+31		250063		530	
0.47	0.75924253		66652		299		0.13272348		9665		+38
		1707737		4029		+27		259728		568	
0.48	0.77631990		70681		326		0.13532076		10233		+48
		1778418		4355				269961		616	
0.49	0.79410408		75036				0.13802037		10849		
		1853454						280810			
0.50	0.81263862						0.14082847				

x	$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$					x	$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$				
0.00	0.03472222					0.19	0.04075438				
		26870						38279		26	
0.01	0.03499092		459			0.20	0.04113717		803		+2
		27329		13				39082		28	
0.02	0.03526421		472		0	0.21	0.04152799		831		0
		27801		13				39913		28	
0.03	0.03554222		485		—1	0.22	0.04192712		859		0
		28286		12				40772		28	
0.04	0.03582508		497		+3	0.23	0.04233484		887		+5
		28783		15				41659		33	
0.05	0.03611291		512		0	0.24	0.04275143		920		—2
		29295		15				42579		31	
0.06	0.03640586		527		—2	0.25	0.04317722		951		+3
		29822		13				43530		34	
0.07	0.03670408		540		+5	0.26	0.04361252		985		+2
		30362		18				44515		36	
0.08	0.03700770		558		—3	0.27	0.04405767		1021		+2
		30920		15				45536		38	
0.09	0 03731690		573		+1	0.28	0.04451303		1059		0
		31493		16				46595		38	
0.10	0.03763183		589		+4	0.29	0 04497898		1097		+5
		32082		20				47692		43	
0.11	0.03795265		609		—4	0.30	0.04545590		1140		0
		32691		16				48832		43	
0.12	0.03827956		625		+4	0.31	0.04594422		1183		+2
		33316		20				50015		45	
0.13	0.03861272		645		0	0.32	0.04644437		1228		+4
		33961		20				51243		49	
0.14	0.03895233		665		0	0.33	0.04695680		1277		+2
		34626		20				52520		51	
0.15	0.03929859		685		+2	0.34	0.04748200		1328		+5
		35311		22				53848		56	
0.16	0.03965170		707		+1	0.35	0.04802048		1384		—3
		36018		23				55232		53	
0.17	0.04001188		730		+1	0.36	0.04857280		1437		+10
		36748		24				56669		63	
0.18	0.04037936		754		—1	0.37	0.04913949		1500		0
		37502		23				58169		63	
			777		+3				1563		+5

x	$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$				
0.38	0.04972118				
		59732		68	
0.39	0.05031850		1631		+3
		61363		71	
0.40	0.05093213		1702		+6
		63065		77	
0.41	0.05156278		1779		+2
		64844		79	
0.42	0.05221122		1858		+9
		66702		88	
0.43	0.05287824		1946		+2
		68648		90	
0.44	0.05356472		2036		+8
		70684		98	
			2134		+6

x	$F'\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; x\right)$				
0.45	0.05427156				
		72818		104	
0.46	0.05499974		2238		+8
		75056		112	
0.47	0.05575030		2350		+5
		77406		117	
0.48	0.05652436		2467		+13
		79873		130	
0.49	0.05732309		2597		
		82470			
0.50	0.05814779				

Вышеуказанные полученные мною формулы для вычисления вековых возмущений были применены к планете (1) Ceres, при чем были вычислены ея вековые возмущения от восьми влиятельных планет: Юпитера, Сатурна, Марса, Земли, Венеры, Меркурия, Урана и Нептуна.

Ниже приводятся основные величины, относящиеся к этим возмущениям. Элементы орбиты Цереры по сообщеню проф. М. Ф. Субботина были взяты такие:

$\log a = 0{,}44207183$; $\quad \iota = 10°37'\ 08''2$;

$\tilde{\omega} = 148°29''54''7$; $\varphi = arc \sin e = 4°29'\ 56''9$; эклиптика и равноденствие

$\theta = 80°48'\ 31''7$; $\quad \mu = 770'',723907$ 1850.0.

Юпитер

Элементы орбиты в той же эклиптике:

$\log a = 0.71623737$; $\quad i = 1°18'41''81$; $\quad \Omega = 66°26'08''12$: $\quad ae = 0.25105508$

$\tilde{\omega} = 11°54\ 26''72$; $\quad \varphi = 2°45'56''93$; $\quad \Phi = 70°11'36''24$; $\quad a^2 = 27.06915763$

$\theta = 98°55\ 58''16$; $\quad m' = \dfrac{1}{1047{,}355}$; $\quad J = 9°22'52''26$; $\quad b^2 = 27.00613060$

$a^2b^2 = 731.033199$

Радиусы векторы и истинные аномалии Цереры для эксцентрических аномалий $\varepsilon = 0$; $30°$; $60°\ldots.330°$:

ε	$\log r$	W	ε	$\log r$	W
0°	0.40659348	0°00′00″00	180°	0.47486940	180°00′00″00
30°	0.41151823	32°19′46″80	210°	0.47061641	207°49′24″90
60°	0.42469477	63°58′29″58	240°	0.45878008	236°10′41″32
90°	0.44207183	94°29′56″90	270°	0.44207183	265°30′03″10
120°	0.45878008	123°49′18″68	300°	0.42469477	296°01′30″42
150°	0.47061641	152°10′35″10	330°	0.41151823	327°40′13″20

(Эти величины, конечно, одинаковы для всех влиятельных планет)

ε	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
0°	−0.71538820	+0.68168940	+0.15335901
30°	−0.96952167	+0.18629768	+0.15912392
60°	−0.92724246	−0.35574007	+0.11692072

ε	cosα	cosβ	cosγ
90°	—0.62434462	—0.77996293	+0.04303230
120°	—0.16886259	—0.98484861	—0.03947585
150°	+0.31409356	—0.94301563	—0.10984917
180°	+0.71538820	—0.68168940	—0.15335901
210°	+0.95126959	—0.26274142	—0.16140890
240°	+0.96525087	+0.22597502	—0.13124727
270°	+0.73658058	+0.67301395	—0.06709252
300°	+0.29946747	+0.95394302	+0.01765647
330°	—0.23946311	+0.96573691	+0.10004824

cosα′	cosβ′	cosγ′
—0.68256591	—0.72873402	+0.05523261
—0.19417551	—0.98032989	—0.03534414
+0.34336316	—0.93231032	—0.11357456
+0.76672723	—0.62242393	—0.15721913
+0.97424955	—0.16070613	—0.15814959
+0.93756161	+0.32630520	—0.12042754
+0.68256591	+0.72873402	—0.05523261
+0.26974568	+0.96266336	+0.02273333
—0.21440002	+0.97195096	+0.09666325
—0.65964076	+0.73675363	+0.14855379
—0.94233546	+0.29282423	+0.16204286
—0.95934042	—0.25120868	+0.12868558

$\cos\alpha'' = +0.14940940$; $\cos\beta'' = -0.06516488$; $\cos\gamma'' = +0.98662575$
для всех значений ε

ε	α	β	γ
0°	—1.5734089	+1.7385212	+0.39111352
30°	—2.2497266	+0.48053578	+0.41044379
60°	—2.2143489	—0.94586143	+0.31087531
90°	—1.4767559	—2.1584687	+0.11908755
120°	—0.23458390	—2.8323671	—0.11353025
150°	+1.1793274	—2.7869891	—0.32464836
180°	+2.3861207	—2.0344918	—0.45769772
210°	+3.0624381	—0.77650618	—0.47702798
240°	+3.0270603	+0.64989094	—0.37745952
270°	+2.2894676	+1.8624987	—0.18567179
300°	+1.0472958	+2.5363973	+0.046946014
330°	—0.36661541	+2.4910191	+0.25806417

k_1	κ_2	k_3
—48.424247	+574.08917	+111.82598
—48.614640	+578.98747	+123.15287
—48.180649	+569.16937	+ 70.649574
—47.221311	+545.25626	+ 10.367398
—45.985065	+511.69305	+ 9.4223717
—44.811769	+477.51885	+ 77.048375
—44.033072	+453.90029	+153.14210
—43.866243	+449.12865	+166.35077
—44.347360	+464.43619	+104.15444
—45.330252	+493.71180	+ 25.201645
—46.542946	+527.14865	+ 1.6111447
—47.669109	+555.83326	+ 48.634697

ε	ξ	$A.10^7$	$B.10^3$
0°	0.7064423	0.10601141	0.24392899
30°	0.7337858	0.10329562	0.24179883
60°	0.6767202	0.11138410	0.24862908
90°	0.5468714	0.12810581	0.26069223
120°	0.3953087	0.14709382	0.27132969
150°	0.2831353	0.16000651	0.27598994
180°	0.2286412	0.16489608	0.27633525
210°	0.2196479	0.16630552	0.27678682
240°	0.2505898	0.16527876	0.27807503
270°	0.3309078	0.15672665	0.27605019
300°	0.4613868	0.13889709	0.26716601
330°	0.6048664	0.11914182	0.25414632

$A_{11}.10^2$	$A_{22}.10^2$	$A_{33}.10^2$
—0.20614090	—0.20990127	+0.41604224
—0.22059984	—0.19181934	+0.41241919
—0.22399998	—0.19879504	+0.42279502
—0.21287759	—0.23075540	+0.44363303
—0.20254770	—0.26360586	+0.46615359
—0.21516754	—0.26508305	+0.48025269
—0.24790402	—0.23660003	+0.48450400
—0.27579221	—0.20981354	+0.48560584
—0.27640323	—0.20887751	+0.48528089
—0.24504610	—0.23166963	+0.47671577
—0.20835353	—0.24821295	+0.45656654
—0.19589354	—0.23684460	+0.43273812

ε	$A_{23}.10^3$	$A_{31}.10^3$	$A_{12}.10^3$
0°	+0.20119965	—0.18157949	+0.16809154
30°	+0.05718001	—0.26694680	+0.06529592
60°	—0.09005702	—0.21023845	—0.13383917
90°	—0.08782678	—0.05991958	—0.22423089
120°	+0.12395603	+0.01028773	—0.05051842
150°	+0.38097473	—0.16076678	+0.25470951
180°	+0.40909034	—0.47848460	+0.36876876
210°	+0.16432253	—0.64629969	+0.18015752
240°	—0.10676287	—0.49591486	—0.15312117
270°	—0.14127049	—0.17317431	—0.33371093
300°	+0.04357254	+0.01794106	—0.19609258
330°	+0.20788225	—0.03050911	+0.06096201

$P_x.10^2$	$P_y.10^2$	$P_z.10^2$
—0.79643580	+0.77543266	—0.46165450
—1.08770616	+0.21231643	—0.47756036
—1.11674800	—0.43645938	—0.38357390
—0.83099641	—1.07155057	—0.16428255
—0.22511500	—1.42534942	+0.17705723
+0.53100416	—1.50011866	+0.55402806
+1.16483386	—1.08274278	+0.81429013
+1.51703313	—0.41146413	+0.85221384
+1.51705847	+0.34844852	+0.65555704
+1.11688653	+0.99377073	+0.30024868
+0.43110441	+1.28995142	—0.06782849
—0.27079217	+1.17677029	—0.33068505

ε	$S.10^1$	$T.10^3$	$W.10^2$
0°	+0.10275661	−0.46962597	−0.62500618
30°	+0.10181175	+0.19944713	−0.64752244
60°	+0.11459146	+0.67029679	−0.51685471
90°	+0.13475284	+0.55639409	−0.21641661
120°	+0.15037169	−0.07007882	+0.23849917
150°	+0.15205608	−0.58367641	+0.72371039
180°	+0.14465240	−0.38950943	+1.0479935
210°	+0.14136612	+0.32485428	+1.0942881
240°	+0.14570426	+0.76785751	+0.85074564
270°	+0.14713540	+0.40023286	+0.39834748
300°	+0.13584443	−0.39507037	−0.08656980
330°	+0.11682107	−0.78387389	−0.44340536

Нахождением S; T; W самая трудная часть задачи заканчивается. Теперь остается интегрирование по орбите возмущаемой планеты; так как разные величины, а в том числе S; T; W, заготовлены для равноотстоящих **эксцентрических** аномалий, то для выделения постоянного члена в ряде Фурье нужно интегрировать по ε, имея в виду, что $dM = (1 - e\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{r}{a}\,d\varepsilon$, и помнить, что множитель fm' в S; T; W не включен $[f = n^2a^3]$. Тогда формулы для вековых возмущений (см. Tisserand. Traité de mécanique céleste. T. I стр. 435) напишутся так:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m}\,\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Se\,r\sin w + Tp)\,d\varepsilon,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{na\sqrt{1-e^2}}{1+m}\,m'\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[Sr\sin w + Tr\,(\cos\varepsilon + \cos w)]\,d\varepsilon,$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{m'n}{1+m}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Wr^2\cos u\,d\varepsilon,$$

$$\sin i\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{m'n}{1+m}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Wr^2\sin u\,d\varepsilon,$$

$$e\frac{d\pi}{dt} = 2e\sin^2\frac{i}{2}\,\frac{d\theta}{dt} + \frac{m'na\sqrt{1-e^2}}{1+m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-Sr\cos w +$$

$$+ T\left(1 + \frac{r}{p}\right)r\sin w]\,d\varepsilon,$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\pi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{i}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) +$$

$$- \frac{2nm'}{1+m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Sr^2\,d\varepsilon.$$

Здесь массу Цереры, конечно, можно признать равной нулю.

Приводим величины $Wr^2 \sin\upsilon$ и $Wr^2 \cos\upsilon$:

ε	$Wr^2 \sin\upsilon$	$Wr^2 \cos\upsilon$
0°	—0.037607935	—0.015432020
30°	—0.042424503	+0.0074953896
60°	—0.027296509	+0.024290068
90°	—0.0050697427	+0.015779858
120°	—0.0039367105	—0.019329557
150°	—0.040518470	—0.048517785
180°	—0.086358602	—0.035436344
210°	—0.095137285	+0.0091829770
240°	—0.058426249	+0.039213260
270°	—0.013759593	+0.027228246
300°	—0.0003965235	—0.0061072047
330°	—0.017072631	—0.024059029

Отсюда $M_E(Wr^2 \sin\upsilon) = -0.035667063$ и $M_E(W_0{}^2 r^2 \cos\upsilon) = -0.0021410118$; далее:

$$\log(nm'.365{,}25) = 2.4293951$$
$$\log\cos\varphi = 0.0013404$$
$$\log M_E(Wr^2\cos\upsilon) = \bar{3}.3306191_n$$
$$\log\left(\frac{di}{dt}\right)'' = \bar{1}{,}7613546_n$$
$$\left(\frac{di}{dt}\right)'' = -0{,}''57724$$

$$\log(nm'.365{,}25) = 2.4293951$$
$$\log\cos\varphi = 0.0013404$$
$$\log M_E(Wr^2\sin\upsilon) = \bar{2}.5522673_n$$
$$\lg\sin i = 0.7345304$$
$$\log\left(\frac{d\theta}{dt}\right)'' = 1.7175332_n$$
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)'' = -52''18351.$$

Вот список величин, относящихся к $\dfrac{de}{dt}$:

ε	$Tr(\cos\varepsilon + \cos w)$	ε	$Tr(\cos\varepsilon + \cos w)$
0°	—0.0023953864	180°	+0.0023249701
30°	+0.0008802352	210°	—0.0016805287
60°	+0.0016730883	240°	—0.0023333320
90°	—0.0001207855	270°	—0.0000868850
120°	+0.0002129525	300°	—0.0009861118
150°	+0.0030194614	330°	—0.0034595303

Отсюда $\Sigma Tr(\cos\varepsilon + \cos w) = -0.0029518522$.

Сумма $\Sigma Sr \sin w = a\sqrt{1-e^2}\Sigma S \sin\varepsilon$ находится сразу, ибо $\Sigma S.\sin\varepsilon$ уже есть.

$$\log\Sigma S\sin\varepsilon\ \bar{3}.4609842_n$$
$$\log a\ 0.4420718$$
$$\log\cos\varphi\ 1.9986596$$
$$\text{Сумма}\quad \bar{3}.9017156_n$$

$$\Sigma Sr\sin w = -0.0079747239$$
$$\Sigma Tr(\cos\varepsilon + \cos w) = -0.0029518522$$
$$\text{Сумма} = 0.0109265761:12 =$$
$$= -0.0009105480,$$

Так что

$$\log(nm'\,365{,}25) = 2.4293951$$
$$\log a\cos\varphi = 0.4407314$$
$$\log M_E\ldots = \bar{4}.9593028_n$$
$$\log\left(\frac{de}{dt}\right)'' = \bar{1}.8294293_n,$$

Отсюда $\left(\dfrac{de}{dt}\right)'' = -0''67520.$

Величины, относящиеся к нахождению $\frac{d\pi}{dt}$, таковы:

ε	$S\cos\varepsilon$	$T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\varepsilon$
0°	+0.010275661	0
30°	+0.0088171559	+0.00019324797
60°	+0.0057295728	+0.0011416730
90°	0	+0.0011162332
120°	−0.0075185844	−0.00012415096
150°	−0.013168442	−0.00060543198
180°	−0.014465240	0
210°	−0.012242665	−0.00033696269
240°	−0.0072852128	−0.0013603289
270°	0	−0.00080294386
300°	+0.0067922217	+0.00067289771
330°	+0.010117001	+0.00075950971

Далее вычисления располагаем так:

$$\Sigma S\cos\varepsilon = -0.012948531;\quad \Sigma T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\varepsilon = +0.00065374326;$$

$$\Sigma S = +0.15878641$$

$\log \Sigma S$	1.2008133	$-\Sigma S\cos\varepsilon$	$= +0.012948531$
$\log\sin\varphi$	2.8945603	$+\Sigma Se$	$= +0.012455858$
Сумма	2.0953736	$-\Sigma S(\cos\varepsilon - e)$	$= +0.025404389$
ΣSe	$= +0.012455858$		$+0.000651729$
		Сумма	$+0.026056118$

$\log \Sigma T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\varepsilon$	$= \bar{4}.8154072$
$\log\cos\varphi$	$= \bar{1}.9986596$
Сумма	4.8140668
Число	$+0.00065172872$

Отсюда

$$M_E\left[-S\frac{r}{a}\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{a}\sin w\right] = +0.00217134317$$

и

$$\log M_E = 3.3367285.$$

Далее вычисляем:

$\log M_E$	$= \bar{3}.3367285$
$\log nm'.365{,}25$	$= 2.4293951$
$\log a^2$	$= 0.8841437$
$\log\cos\varphi$	$= 1.9986596$
$\log\sin\varphi$	$= 1.1054397$
Сумма	1.7543666
Число	$+56''80239$

$$\frac{i}{2} = +5°18'34''.10$$

$\log\sin\frac{i}{2}$	$= 2.96630696$
$\log 2\sin^2\frac{i}{2}$	$= 2.2336439$
$\log\left(\frac{d\theta}{dt}\right)''$	$= 1.7175332_n$
Сумма	$\bar{1}.9511771_n$
Число	$-0''.89367$

$$1\text{-ое слагаемое в } \frac{d\pi}{dt} = -0''89367$$

$$2\text{-ое слагаемое в } \frac{d\pi}{dt} = +56''80239$$

$$\left(\frac{d\pi}{dt}\right)'' = +55''90872$$

$$\log\left(\frac{d\pi}{dt}\right)'' = 1.7474795$$

Наконец для нахождения $\frac{dL}{dt}$, т. е. векового возмущения средней долготы в эпоху, имеем такие величины:

ε	Sr^2	ε	Sr^2	ε	Sr^2
0°	+0.066833892	120°	+0.12437304	240°	+0.12051258
30°	+0.67738314	150°	+0.13281178	270°	+0.11268363
60°	+0.081010588	180°	+0.12884408	300°	+0.096035409
90°	+0.10320045	210°	+0.12347475	330°	+0.077724450

Отсюда $M_E(Sr^2) = 0.10293691$; кроме того $e^2:(1+\sqrt{1-e^2}) =$

$$= 1 - \sqrt{1-e^2} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Далее:

$\log M_E = \bar{1}.0125712$
$\log(2nm'\ 365{,}25) = 2.7304251$
Сумма $= 1.7429963$
3-е слагаемое в $\frac{dL}{dt} = -55'',334.538$

$\log 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = \bar{3}.4887604$
$\log\frac{d\pi}{dt} = 1.7474795$
Сумма $\bar{1}.2362399$
1-ое слагаемое в $\frac{dL}{dt} = +0''172282$

$$\log 2\sin^2\frac{i}{2}\ \frac{d\theta}{dt}\ 1{,}9511771_n$$

$$\log\cos\varphi\ \bar{1}{,}.9986596$$

$$\text{Сумма}\ \bar{1}{,}.9498367_n$$

$$2\text{-ое слагаемое в } \frac{dL}{dt} = -0''890916.$$

Тогда

$$\frac{dL}{dt} = -55''334538 + 0''172282 - 0'890916 = -56''05317.$$

Для остальных влиятельных планет вычисления вековых возмущений Цереры так подробно излагать не будем, а приведем лишь наиболее характерные величины и результаты.

Сатурн.

ε	$1-\xi$	$A_{11}.10^3$	$A_{22}.10^3$
0°	0.057191863	—0.29687866	—0.31070741
30°	0.042485809	—0.29671500	—0.31374075
60°	0.030574462	—0.29725410	—0.30864146
90°	0.023155619	—0.30447182	—0.29963526
120°	0.023086960	—0.30899256	—0.29574133
150°	0.032267865	—0.30576468	—0.30188624
180°	0.049245340	—0.29923045	—0.31374628
210°	0.069113289	—0.29862986	—0.32165822
240°	0.085230967	—0.30848833	—0.31925255
270°	0.091727049	—0.32278171	—0.31026204
300°	0.086606342	—0.32919368	—0.30225680
330°	0.073186615	—0.32167610	—0.30394644

$A_{33}.10^3$	$A_{23}.10^5$	$A_{31}.10^5$
+0.61758611	+0.90099815	+0.77641421
+0.61045578	+1.02444821	+0.19528596
+0.60589563	+0.60697377	—0.24432933
+0.60410707	+0.08697703	—0.13380635
+0.60473385	+0.01697232	+0.37140597
+0.60765113	+0.53462758	+0.71717694
+0.61297667	+1.21218928	+0.48714548
+0.62028814	+1.43088104	—0.17365066
+0.62774072	+0.96489223	—0.64679292
+0.63226399	+0.24798962	—0.42419288
+0.63145053	—0.02657444	+0.32444920
+0.62561715	+0.35053581	+0.88741535

ε	$A_{12}.10^5$	$P_x.10^3$	$P_y.10^3$
0°	—1.05450897	+0.82547310	+1.35618288
30°	—0.32336619	—0.01231838	+1.59421867
60°	+0.51434479	—0.87406274	+1.42949547
90°	+0.62112742	—1.51790655	+0.78046250
120°	—0.06380057	—1.77271918	—0.06648899
150°	—0.76473522	—1.56752765	—0.93152308
180°	—0.66323370	—0.95612434	—1.58752293
210°	+0.27530269	—0.09241925	—1.86446145
240°	+1.22765818	+0.80511588	—1.67762287
270°	+1.24169390	+1.48649422	—1.05850355
300°	+0.22773703	+1.74191307	—0.16882120
330°	—0.86163035	+1.49975786	+0.71801053

$P_z.10^3$	$S.10^2$	$T_0.10^4$
—0.51676729	+0.14957416	—0.17607792
—0.49753559	+0.15077869	+0.18393742
—0.34063843	+0.16350527	+0.18253537
—0.08731973	+0.17042503	+0.09415034
+0.20143372	+0.17611580	—0.40293272
+0.45489538	+0.17608942	—0.53909603
+0.60743214	+0.17452499	—0.12027985
+0.61371372	+0.17581034	+0.54642058
+0.46247018	+0.17986002	+0.87899749
+0.18898019	+0.18141611	+0.49791543
—0.12569862	+0.17451039	—0.24574651
—0.38450015	+0.16137439	—0.67757285

$$\Omega = 342°03'15''09; \quad \Phi = 76°27'15''90. \quad J = 8°35'29''86; \quad m' = \frac{1}{3501,6}$$

ε	$W_0 . 10^3$
0°	—0.74170912
30°	—0.71796003
60°	—0.49974661
90°	—0.12739221
120°	+0.29022096
150°	+0.65433437
180°	+0.87024906
210°	+0.87606314
240°	+0.65864935
270°	+0.26887371
300°	—0.18047482
330°	—0.55126468

$$\frac{da}{dt} = -0''0001.$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -1''41103; \qquad \frac{d\pi}{dt} = +1''29011$$

$$\frac{di}{dt} = -0''04072; \qquad \frac{dL}{dt} = -2''12460$$

$$\frac{de}{dt} = -0''02238;$$

Марс.

ε	ξ	$A_{11} . 10^1$	$A_{22} . 10^1$
0°	0.16594805	+0.45516971	—0.20263968
30°	0.21317701	+0.27117802	—0.049852329
60°	0.29328960	—0.049819111	+0.24813908
90°	0.39846073	—0.13196758	+0.30161176
120°	0.50536256	—0.013523223	+0.15119898
150°	0.58484338	+0.12441805	—0.011603420
180°	0.62166586	+0.18759009	—0.087653973
210°	0.60963875	+0.15406705	—0.053046918
240°	0.54249800	+0.033975993	+0.085502282
270°	0.41943835	—0.11132790	+0.27210133
300°	0.273164 1	—0.10935176	+0.33154727
330°	0.17679380	+0.19433107	+0.071816876

$A_{33} . 10^1$	$A_{23} . 10^2$	$A_{31} . 10^2$
—0.25253005	+0.17968414	—1.85574077
—0.22134764	—0.90476510	—1.62332504
—0.19831999	—1.04932405	—0.55222764
—0.16964419	—0.43923953	+0.02159866
—0.13767583	+0.06309627	—0.03823426
—0.11281468	+0.19054636	—0.30893553
—0.099936133	+0.04543958	—0.52233493
—0.10102013	—0.23261425	—0.57767220
—0.11947827	—0.50456477	—0.43105112
—0.16077352	—0.54524192	—0.11502773
—0.22219550	—0.06293592	+0.02068882
—0.26614785	+0.61324949	—0.73985589

ε	$A_{12} . 10^1$	$P_x . 10^1$	$P_y . 10^1$
0°	—0.064238073	+2.45063503	—0.24315406
30°	+0.25922925	+1.96722702	+1.12799276
60°	+0.21710042	+0.88996656	+1.78090870
90°	—0.021383298	—0.12042867	+1.68132752
120°	—0.15789867	—0.75802777	+1.20044915
150°	—0.13527196	—1.06442042	+0.64022857
180°	—0.024115952	—1.16054454	+0.09879622

ε	$A_{12}.10^1$	$P_x.10^1$	$P_y.10^1$
210°	+0.099475863	—1.10834969	—0.43590285
240°	+0.16344486	—0.88435380	—1.00060430
270°	+0.084707009	—0.37011251	—1.58130174
300°	—0.16260964	+0.59646880	—1.95654400
330°	—0.32340049	+1.83533243	—1.56852681

ε	$P_z.10^1$	S	$T.10^2$
0°	—0.76265442	—0.25446968	—0.11506076
30°	—0.76588745	—0.23583255	—0.88551908
60°	—0.48838924	—0.20324299	—1.17884960
90°	—0.18188824	—0.16893084	—1.12147572
120°	+0.03096807	—0.14175407	—0.84932460
150°	+0.15525821	—0.12501820	—0.49540994
180°	+0.22698881	—0.11849684	—0.11526422
210°	+0.26886627	—0.12081543	+0.30045492
240°	+0.28123851	—0.13597692	+0.77797530
270°	+0.22996491	—0.16334681	+1.27360710
300°	+0.026801044	—0.20400568	+1.50297664
330°	—0.38828547	—0.24337176	+0.96715466

$\Omega = 113°42'05''64$; $\Phi = 61°24'26''79$; $J = 9°06'35''65$; $m' = 1:3085000$;

ε	$W.10^2$
0°	—4.13231706
30°	—3.99240346
60°	—2.39863162
90°	—0.90046914
120°	—0.02915616
150°	+0.39733210
180°	+0.62164764
210°	+0.77050542
240°	+0.85800452
270°	+0.72767464
300°	—0.11586548
330°	—2.17139470

$$\frac{da}{dt} = +0''0000004 \qquad \frac{d\pi}{dt} = +0''064190$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0''039992 \qquad \frac{dL}{dt} = +0''239440$$

$$\frac{di}{dt} = +0''000359$$

$$\frac{de}{dt} = +0''000069$$

Земля.

ε	$1-\xi$	$A_{11}.10^2$	$A_{22}.10^2$
0°	+0.15753335	+0.57569934	+0.98582966
30°	+0.15089634	—1.39494899	+2.88554571
60°	+0.14077359	—0.79509794	+2.25395378
90°	+0.12622721	+1.21061071	+0.17256323
120°	+0.10892083	+2.28097080	—1.05008095
150°	+0.09416417	+1.72866932	—0.66382357
180°	+0.08645148	+0.32529153	+0.63529469
210°	+0.08805978	—0.84342636	+1.80755118
240°	+0.09988958	—0.86840617	+1.96132401
270°	+0.12053858	+0.61345898	+0.70777977
300°	+0.14314622	+2.60706659	—1.06171115
330°	+0.15684000	+2.81676542	—1.19040608

ε	$A_{33}.10^1$	$A_{23}.10^2$	$A_{31}.10^2$
0°	−0.15615292	+0.73206208	+0.67064114
30°	−0.14905965	+1.00940147	+0.17317153
60°	−0.14588562	+0.66754910	−0.27331441
90°	−0.13831740	+0.16007500	−0.21021075
120°	−0.12308897	−0.02180757	+0.14982897
150°	−0.10648457	+0.14824649	+0.40863373
180°	−0.09605861	+0.44011724	+0.39584223
210°	−0.09641248	+0.63019296	+0.15271100
240°	−0.10929178	+0.57351674	−0.15475553
270°	−0.13212388	+0.26645228	−0.25986363
300°	−0.15453559	−0.01680491	+0.05937455
330°	−0.16263591	+0.15923883	+0.58431369

ε	$A_{12}.10^1$	P_x	P_y
0°	+0.23373713	−0.11228133	−0.12199276
30°	+0.07566329	−0.02798309	−0.16013163
60°	−0.14998050	+0.05883181	−0.14484795
90°	−0.18814699	+0.11671142	−0.08919815
120°	−0.04953229	+0.13415279	−0.01958085
150°	+0.09895016	+0.11819958	+0.04300636
180°	+0.14592976	+0.08045348	+0.08982107
210°	+0.06824774	+0.02833353	+0.11832132
240°	−0.08235330	−0.03403669	+0.12478379
270°	−0.18839797	−0.09942036	+0.10152108
300°	−0.11287959	−0.14980431	+0.04226873
330°	+0.11796441	+0.15855760	−0.04307281

	$P_z.10^1$	S	$T.10^3$
	−0.36319179	−0.16955935	+0.6607701
	−0.38001253	−0.16674787	+1.8174651
	−0.27312963	−0.15860536	+2.0356159
	−0.10285534	−0.14723805	+1.1371957
	+0.06099235	−0.13570676	−0.0340775
	+0.18079341	−0.12703478	−0.8016378
	+0.25040297	−0.12308563	−1.0506342
	+0.27223774	−0.12459155	−0.9324909
	+0.24146319	−0.13150959	−0.6593626
	+0.14450652	−0.14280132	−0.4685855
	−0.02300007	−0.15566928	−0.4656872
	−0.22117244	−0.16572510	−0.2669858

$\Omega = 340^\circ 26' 51''70$; $\Phi = 67^\circ 41' 23''00$; $J = 10^\circ 37' 08''2$; $m' = 1:329390.$

ε	$W.10^2$
0°	−0.75885803
30°	−0.78177942
60°	−0.53205456
90°	−0.18178413
120°	+0.11216320
150°	+0.30121340
180°	+0.40523385
210°	+0.44636494
240°	+0.41631320
270°	+0.27053851
300°	−0.03619774
330°	−0.44804193

$$\frac{da}{dt} = -0''0000004;$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0''106807; \qquad \frac{d\pi}{dt} = +0''092360.$$

$$\frac{di}{dt} = +0''000011; \qquad \frac{dL}{dt} = +1''887510.$$

$$\frac{de}{dt} = -0''000536;$$

Венера.

ε	$1-\xi$	$A_{11} . 10^2$	$A_{22} . 10^2$
0°	0.044731773	+2.62380598	—1.05693530
30°	0.042558225	+0.25511970	+1.24452056
60°	0.038308221	—1.30726970	+2.70561412
90°	0.033257108	—0.61958241	+1.89073038
120°	0.028600664	+1.00839783	+0.12599249
150°	0.025295680	+1.94375372	—0.92179398
180°	0.023891335	+1.62555268	—0.66048738
210°	0.024661136	+0.38893253	+0.59473688
240°	0.027754891	—0.87497232	+1.96089936
270°	0.032951780	—0.96689533	+2.22465477
300°	0.039013482	+0.73362936	+0.71026221
330°	0.043577170	+2.80701469	—1.24663444

$A_{33} . 10^1$	$A_{23} . 10^2$	$A_{31} . 10^2$
—0.15668702	+0.19200964	+0.56217442
—0.14996407	+0.48876371	+0.39056280
—0.13983443	+0.44412437	+0.05324596
—0.12711475	+0.16298149	—0.07128752
—0.11343903	—0.04253644	+0.05596151
—0.10219612	—0.03907674	+0.24698636
—0.09650671	+0.11691499	+0.34100373
—0.09836684	+0.29829972	+0.27829050
—0.10859257	+0.36936683	+0.09519354
—0.12577592	+0.24060245	—0.06386523
—0.14438914	—0.00814051	+0.00818587
—0.15603806	—0.07999992	+0.33467362

ε	$A_{12} . 10^1$	P_x	P_y
0°	+0.14231694	—0.15242123	—0.05200714
30°	+0.21872453	—0.09821863	—0.12272968
60°	+0.04881196	—0.01782338	—0.14753885
90°	—0.13577694	+0.05512850	—0.12631191
120°	—0.15884728	+0.10147045	—0.07720947
150°	—0.04650131	+0.11854422	—0.01877108
180°	+0.08881896	+0.11058187	+0.03794642
210°	+0.14808425	+0.08106944	+0.08700365
240°	+0.07828610	+0.03135394	+0.12207173
270°	—0.09113713	—0.03528777	+0.13249173
300°	—0.20851392	—0.10591585	+0.10519020
330°	—0.10276992	—0.15399801	+0.03677569

P_z	S	T
—0.02095212	—0.16238929	+0.00002330
—0.02234137	—0.15875217	+0.00039314
—0.01638893	—0.14950162	+0.00054860
—0.00674406	—0.13798099	+0.00041407
+0.00276274	—0.12753461	+0.00016345
+0.01011829	—0.12044346	—0.00004506
+0.01478133	—0.11783488	—0.00016367
+0.01659351	—0.12006257	—0.00020896
+0.01507644	—0.12692448	—0.00022134
+0.00944152	—0.13743153	—0.00024737
—0.00042052	—0.14927573	—0.00029362
—0.01220880	—0.15879023	—0.00024883

$\Omega = 313°57'03''99$; $\Phi = 65°07'06''38$; $J = 7°14'59''34$; $m' = 1:410000$

ε	$W.10^2$
0°	—0.2381710
30°	—0.2490015
60°	—0.1716350
90°	—0.0635615
120°	+0.0284240
150°	+0.0911189
180°	+0.1292968
210°	+0.1475238
240°	+0.1415612
270°	+0.0967668
300°	—0.0007581
330°	—0.1341358

$$\frac{da}{dt} = +0''000003,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0''027558, \qquad \frac{d\pi}{dt} = +0''037903,$$

$$\frac{di}{dt} = +0''000227, \qquad \frac{dL}{dt} = +1''446688.$$

$$\frac{de}{dt} = -0''000025.$$

Меркурий.

ε	1—ξ	$A_{11}.10^2$	$A_{22}.10^2$
0°	0.0034672096	—1.01406484	+2.50230926
30°	0.0035181398	—1.25782011	+2.74149764
60°	0.0031488601	+0.75708371	+0.64167086
90°	0.0026695301	+2.38671910	—1.10798884
120°	0.0023097702	+1.99111634	—0.83698801
150°	0.0020922702	+0.45082705	+0.59483049
180°	0.0019750000	—0.75598272	+1.72751450
210°	0.0019351200	—0.83049104	+1.77681970
240°	0.0019790900	+0.24946936	+0.73153470
270°	0.0021531802	+1.76590239	—0.68532305
300°	0.0025102301	+2.37239117	—1.13991815
330°	0.0030246500	+1.08192625	+0.30928561

$A_{33}.10'$	$A_{23}.10^2$	$A_{31}.10^2$
—0.14883045	+0.22080323	+0.07516243
—0.14836767	+0.42926153	—0.10243126
—0.13987546	+0.34008373	—0.34934286
—0.12787274	+0.08210944	—0.36415385
—0.11541281	—0.05509896	—0.17506316
—0.10456576	+0.00254701	+0.00243121
—0.09715319	+0.14857588	+0.04158837
—0.09463287	+0.25697162	—0.05550205
—0.09810043	+0.24803356	—0.21073570
—0.10805793	+0.11537380	—0.30391412
—0.12324730	—0.03609733	—0.22935396
—0.13912120	—0.01963281	—0.02371900

ε	$A_{12}.10^1$	P_x	P_y
0°	+0.13542969	—0.05091529	—0.14270923
30°	—0.10155430	+0.03389075	—0.15163774
60°	—0.21294524	+0.10805100	—0.10742806
90°	—0.08299946	+0.14012063	—0.03206569
120°	+0.09877384	+0.12647275	+0.04038830
150°	+0.15530999	+0.08390777	+0.08964112
180°	+0.07544197	+0.02983626	+0.11211132

ε	$A_{12}.10^1$	P_x	P_y
210°	—0.05908120	—0.02540885	+0.11060012
240°	—0.14742608	—0.07568113	+0.08721291
270°	—0.10869534	—0.11404734	+0.04264091
300°	+0.05667077	—0.12986419	—0.02013562
330°	+0.20286601	—0.11057342	—0.08974163

ε	P_z	S	T
0°	—0.00796364	—0.15158380	+0.00659259
30°	—0.01541834	—0.15598094	+0.00701182
60°	—0.01771412	—0.15331150	+0.00489754
90°	—0.01413528	—0.14442588	+0.00146213
120°	—0.00718967	—0.13294821	—0.00164398
150°	+0.00014090	—0.12273042	—0.00362685
180°	+0.00620523	—0.11609214	—0.00449832
210°	+0.01043250	—0.11387716	—0.00446681
240°	+0.01252001	—0.11609263	—0.00360185
270°	+0.01197747	—0.12233223	—0.00182480
300°	+0.00818980	—0.13166786	+0.00087723
330°	+0.00105483	—0.14235304	+0.00406957

$\Omega = 44°37'06''71$; $\Phi = 28°23'53''78$; $I = 6°13'16''15$; $m' = 1:8000000.$

ε	$W.10^3$
0°	—0.078502
30°	—1.05137
60°	—1.09905
90°	—0.91341
120°	—0.63625
150°	—0.38778
180°	—0.20804
210°	—0.09408
240°	—0.04134
270°	—0.07984
300°	—0.18985
330°	—0.44542

$$\frac{da}{dt} = +\,0''0000003, \qquad \frac{d\pi}{dt} = +\,0''000484,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\,0''000241, \qquad \frac{dL}{dt} = +\,0''071482.$$

$$\frac{di}{dt} = +\,0''000044,$$

$$\frac{de}{dt} = -\,0''000018.$$

Уран.

ε	1—ε	$A_{11}.10^4$	$A_{22}.10^4$
0°	0.0058570446	—0.36635308	—0.35954925
30°	0.0061436366	—0.36700900	—0.35930006
60°	0.0060186361	—0.36412095	—0.36153373
90°	0.0052269771	—0.37425406	—0.37803068
120°	0.0037929553	—0.35735069	—0.36370285
150°	0.0020988641	—0.35731626	—0.36057660
180°	0.0008665120	—0.35835249	—0.35711835
210°	0.0005825580	—0.35847405	—0.35629150
240°	0.0012929551	—0.35993247	—0.36122711
270°	0.0026265909	—0.35677202	—0.36202432
300°	0.0040762792	—0.35857207	—0.36333439
330°	0.0051806809	—0.36261576	—0.36180637

$A_{33}.10^4$	$A_{23}.10^6$	$A_{31}.10^6$
+0.72590261	−0.106826	+0.401179
+0.72631037	+0.074723	+0.450604
+0.72565476	+0.194842	+0.290771
+0.72386122	+0.123194	+0.074143
+0.72105451	−0.078484	−0.005727
+0.71789405	−0.208816	+0.102132
+0.71547260	−0.141129	+0.260495
+0.71476471	+0.061155	+0.295479
+0.71606325	+0.208614	+0.169239
+0.71879904	+0.164614	+0.014722
+0.72190555	−0.019802	+0.008817
+0.72442361	−0.156579	+0.188240

ε	$A_{12}.10^6$	$P_x.10^3$	$P_y.10^3$
0°	+0.211532	+0.17333613	−0.06314246
30°	−0.141297	+0.18183150	+0.04073243
60°	−0.384483	+0.13792691	+0.13519051
90°	−0.304686	+0.05526878	+0.20217233
120°	−0.042363	−0.04902765	+0.20291428
150°	+0.172488	−0.14109704	+0.15807341
180°	+0.138892	−0.19840179	+0.07296527
210°	−0.059664	−0.20645067	−0.02954537
240°	−0.171597	−0.16455918	−0.12373328
270°	−0.042144	−0.08009427	−0.18258487
300°	+0.232388	+0.02178428	−0.19220856
330°	+0.374498	+0.11472151	−0.14849750

$P_z.10^4$	$S.10^3$	$T.10^5$
−0.6043417	+0.17264879	−0.572406
−0.6354777	+0.17293876	+0.250637
−0.5158851	+0.18486397	+0.801681
−0.2240946	+0.20807182	+0.456869
+0.1386602	+0.20819183	−0.451217
+0.4726665	+0.20551939	−1.011557
+0.690322	+0.19787211	−0.719326
+0.7377104	+0.19292654	+0.174791
+0.6039943	+0.19512934	+0.903534
+0.3219405	+0.19622323	+0.816750
−0.0368224	+0.19339420	−0.001512
−0.3768334	+0.18307765	−0.721640

$\Omega = 273°07'01''13$; $\Phi = 67°05'34''42$; $I = 9°51'04''50$; $m' = 1:22650$.

ε	$W.10^4$
0°	−0.8856801
30°	−0.9405339
60°	−0.7564865
90°	−0.3340185
120°	+0.2014963
150°	+0.69203[illegible]6
180°	+1.0123007
210°	+1.0822775
240°	+0.8877285
270°	+0.4710107
300°	−0.0556140
330°	−0.5534499

$$\frac{da}{dt} = +0''00003, \qquad \frac{d\pi}{dt} = +0''023266,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0''027122, \qquad \frac{dL}{dt} = -0''037347.$$

$$\frac{di}{dt} = +0''000002,$$

$$\frac{de}{dt} = +0''000247.$$

Нептун.

ε	1—ξ	$A_{11} . 10^5$	$A_{22} . 10^5$
0°	0.00032116301	—0.9246831	—0.9294071
30°	0.00026113602	—0.9261981	—0.9270963
60°	0.00026909099	—0.9286993	—0.9249924
90°	0.00032488398	—0.9294098	—0.9254677
120°	0.00043209297	—0.9277190	—0.9285327
150°	0.00057090896	—0.9257709	—0.9316617
180°	0.00068386406	—0.9262041	—0.9321489
210°	0.00076000000	—0.9293294	—0.9298614
240°	0.00076976702	—0.9326090	—0.9269896
270°	0.00067488406	—0.9329858	—0.9261203
300°	0.00055750000	—0.9300850	—0.9277616
330°	0.00042068204	—0.9262517	—0.9296090

$A_{33} . 10^4$	$A_{23} . 10^7$	$A_{31} . 10^7$
+0.18540912	+0.31473	—0.02887
+0.18524381	+0.23136	—0.18996
+0.18536930	+0.05748	—0.20315
+0.18548808	—0.01823	—0.05728
+0.18562500	+0.10156	+0.08862
+0.18574305	+0.31936	+0.06687
+0.18584001	+0.43356	—0.13218
+0.18591940	+0.33594	—0.31484
+0.18596004	+0.11878	—0.32237
+0.18592168	—0.01572	—0.13782
+0.18578482	+0.04562	+0.06743
+0.18558630	+0.21904	+0.10964

ε	$A_{12} . 10^7$	$P_x . 10^4$	$P_y . 10^4$
0°	+0.04321	—0.09052434	+0.45876814
30°	+0.21316	—0.32808514	+0.34059677
60°	+0.11565	—0.47594398	+0.12095173
90°	—0.14151	—0.49447216	—0.14197583
120°	—0.27816	—0.37816095	—0.37783007
150°	—0.12785	—0.15799356	—0.52302520
180°	+0.18670	+0.10683933	—0.53850448
210°	+0.36945	+0.34538650	—0.42026964
240°	+0.24179	+0.49371256	—0.19978231
270°	—0.07994	+0.51169798	+0.06389709
300°	—0.29658	+0.39443299	+0.29966543
330°	—0.22071	+0.17380003	+0.44401539

$P_z . 10^4$	$S . 10^4$	$T . 10^5$
—0.15375304	+0.43678072	—0.0954508
—0.15216396	+0.44301271	+0.1162508
—0.10660748	+0.47684325	+0.2015575
—0.02885176	+0.51345099	+0.0714287
+0.06045081	+0.53035179	—0.1388945
+0.13737406	+0.52524158	—0.2246663
+0.18114702	+0.51269895	—0.1066215
+0.17985042	+0.50787194	+0.1078880
+0.13377073	+0.51205786	+0.2232976
+0.05533017	+0.51201276	+0.1296733
—0.03420353	+0.49389662	—0.0847519
—0.11067264	+0.46104536	—0.2014545

$\Omega = 273°07'01''13$; $\Phi = 67°05'34''42$; $J = 9°51'04''50$; $m' = 1:19350$

ε	$W.10^4$
0°	—0.22679142
30°	—0.22450944
60°	—0.15726226
90°	—0.04253624
120°	+0.08916073
150°	+0.20249773
180°	+0.26691213
210°	+0.26497953
240°	+0.19712371
270°	+0.08157095
300°	—0.05040929
330°	—0.16320516

$$\frac{da}{dt} = -0''00000003 \qquad \frac{d\pi}{dt} = +0''0076259$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -0''0078115 \qquad \frac{dL}{dt} = -0''0112112$$

$$\frac{di}{dt} = -0''0002172$$

$$\frac{de}{dt} = +0''0000143$$

В результате приведем таблицу, показывающую результаты моих вычислений в сравнении с другими авторитетами: первый столбец— вышеуказанные вычисленные мною величины с вышеуказанными массами планет; второй столбец—сообщение проф. Субботина с указанием массы планеты; третий столбец—каковы бы оказались возмущения по моим вычислениям, если бы массу планеты взять ту, которая у другого автора.

	Юпитер.			Сатурн.	
	Горячев	Merfield	Горячев	Горячев	Неизв. автор
$\frac{de}{dt}$	—0″6752	—0.6752	—0.6749	—0.0224	—0.0300
$\frac{di}{dt}$	—0″5772	—0.5774	—0.5769	—0.0407	—0.0410
$\frac{d\theta}{dt}$	—52″184	—52.158	—52.158	—1.411	—1.410
$\frac{d\pi}{dt}$	+55″909	+55.879	+55.881	+1.290	+1.315
$\frac{dL}{dt}$	—56″053	—56.026	—56.025	—2.125	—2.122
m'	1:1047,35	1:1047,879	1:1047,879	1:3501,6	1:3501,6

Марс.

	Горячев	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	+0″000069	+0″000068	+0″000069
$\frac{di}{dt}$	+0.000359	+0.000357	+0.000358
$\frac{d\theta}{dt}$	—0.039992	—0.039884	—0.039882
$\frac{d\pi}{dt}$	+0.064190	+0.064008	+0.064014
$\frac{dL}{dt}$	+0.239440	+0.238781	+0.238782
m'	1:3085000	1:3093500	1:3093500

Земля.

	Горячев	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	—0″000536	—0″000547	—0″000547
$\frac{di}{dt}$	+0.000011	+0.000011	+0.000011
$\frac{d\theta}{dt}$	—0.106807	—0.108987	—0.108987
$\frac{d\pi}{dt}$	+0.092360	+0.094236	+0.094245
$\frac{dL}{dt}$	+1.887510	+1.926030	+1.926039
m'	1:329390	1:322800	1:322800

Венера.

	Горячев	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	—0″000025	—0″000025	—0″000024
$\frac{di}{dt}$	+0.000227	+0.000219	+0.000219
$\frac{d\theta}{dt}$	—0.027558	—0.026580	—0.026585
$\frac{d\pi}{dt}$	+0.037903	+0.036567	+0.036565
$\frac{dL}{dt}$	+1.446688	+1.395618	+1.395629
m'	1:410000	1:425000	1:425000

Меркурий.

	Горячев	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	—0.000018	—0.000020	—0.000019
$\frac{di}{dt}$	+0.000044	+0.000047	+0.000047
$\frac{d\theta}{dt}$	—0.000241	—0.000257	—0.000257
$\frac{d\pi}{dt}$	+0″000484	+0″000517	+0″000516
$\frac{dL}{dt}$	+0.071482	+0.076247	+0.076247
m'	$1:(8.10^6)$	$1:(75.10^5)$	$1:(75.10^5)$

Уран.

	Горячев	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	$+0''000247$	$+0.000195$	$+0.000245$
$\frac{di}{dt}$	$+0''000002$	$+0.000000$	$+0.000002$
$\frac{d\theta}{dt}$	-0.027122	-0.026973	-0.026944
$\frac{d\pi}{dt}$	$+0.023266$	$+0.022930$	-0.023113
$\frac{dL}{dt}$	-0.037347	-0.036902	-0.037101
m'	1:22650	1:22800	1:22800

Нептун.

	Горячвв	Неизв. автор	Горячев
$\frac{de}{dt}$	$+0''000014$	$+0.000014$	$+0.000014$
$\frac{di}{dt}$	-0.000217	-0.000213	-0.000213
$\frac{d\theta}{dt}$	-0.007812	-0.007647	-0.007673
$\frac{d\pi}{dt}$	$+0.007626$	$+0.007471$	$+0.007490$
$\frac{dL}{dt}$	-0.011211	-0.010975	-0.011012
m'	1:19350	1:19700	1:19700

Чтобы настоящая работа носила достаточно полноценный характер в смысле обзора важнейшей литературы по теории вековых возмущений планет, следует в заключение дать краткое изложение мемуара Hill'а, помещенного в American Journal of Mathematics., Vol. XXIII, pp. 317—336 (1901) под заглавием: „Secular perturbations of the Planets", статьи Arndt'а: „Recherches sur le calcul des forces perturbatrices dans la théorie des perturbations séculaires" (Neuchâtel. 1906) и статьи R. T. A. Innes'а „Computation of. secular perturbations", помещенной в Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. May 1907,—литературы, указанной в начале настоящей работы.

Hill в начале своей роботы вспоминает формулы Halphen'а (тоже указанные выше), свойства коэфициентов P_x; P_y... и потенциальную функицю Φ; полагая конус, проэктирующий орбиту возмущающего тела из какого-либо положения возмущаемой планеты отнесенным к своим главным осям, а уравнение его в виде

$$\frac{x^2}{G_x}+\frac{y^2}{G_y}+\frac{z^2}{G_z}=0$$

берет проекции силы притяжения эллиптического кольца в виде

$$X = \frac{x_0}{\pi abh} P_x; \quad Y = \frac{y_0}{\pi abh} Q_y; \quad Z = \frac{z_0}{\pi abh} R_z,$$

где x_0; y_0; z_0 координаты Солнца в выбранной системе координат.

Так как P_x; Q_y; R_z зависят лишь от формы конуса, то Hill интегрирует по плоскому сечению, перпендикулярному к оси z, т. е. берет текущие координаты x; y; z поверхности конуса в виде

$$x = \varepsilon\sqrt{-G_x}\cos T; \quad y = \varepsilon\sqrt{-G_y}\,.\sin T; \quad z = \varepsilon\sqrt{G_z} = const.,$$

вследствие чего

$$X = -\frac{x_0}{m^3}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T dT}{(1-k^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}}; \quad Y = -\frac{y_0}{m^3}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T dT}{(1-k^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}};$$

$$Z = \frac{z_0}{m^3}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{(1-k^2\sin^2 T)^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$k^2 = (G_y - G_z):(G_z - G_x); \quad m = \sqrt{G_z - G_x};$$

пользуясь обозначениями Jacobi

$$k = \sin\theta \frac{q + q^9 + q^{25} + \ldots}{1 + 2(q^4 + q^{16} + q^{36} + \ldots)} = \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1 + \sqrt{\cos\theta}}\right)^2;$$

$$K = \frac{4\,[1 + 2(q^4 + q^{16} + \ldots)]^2}{\cos^2\theta\,(1 + \sqrt{\cos\theta})};$$

$$L = \frac{(1 + \sqrt{\cos\theta})^3}{\sin^2\theta\cos^{\frac{5}{2}}\theta}\cdot\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \ldots}{[1 + 2(q^4 + q^{16} + \ldots)]^3},$$

пишет сперва X; Y; Z в виде

$$X = -\frac{x_0}{m^3} L\cos^2\theta; \quad Y = \frac{y_0}{m^3}(L - K); \; Z = \frac{z_0}{m^3}(K - L\sin^2\theta),$$

а затем, полагая
$M = K - L\sin^2\theta$; $\sin^2 k = L\cos^2\theta:(K - L\sin^2\theta)$; $\cos^2 k = (K - L):(K - L\sin^2\theta)$
в виде

$$X = -\frac{M}{m^3}\sin^2 k\,.\,x_0; \quad Y = -\frac{M}{m^3}\cos^2 k\,.\,y_0; \quad Z = \frac{M}{m^3} z_0.$$

[k под знаком sin и cos не смешивать с модулем!]

Если R обозначает величину равнодействующей силы притяжения эллиптического кольца, H и Λ широту и долготу той точки неба, в которую направлена эта равнодействующая, r_0—радиус-вектор возмущаемой планеты, а η_0; λ_0 широту и долготу Солнца, отнесенные к центру и главным осям сферо-конического сечения упомянутого конуса, то

$$R\cos H\sin\Lambda = -\frac{M}{m^3}\sin^2 k\, r_0\cos\eta_0\sin\lambda_0; \quad R\sin H = -\frac{M}{m^3}\cos^2 k\ \ r_0\ \sin\eta_0;$$

$$R\cos H\cos\Lambda = +\frac{M}{m^3}\, r_0\cos\eta_0\cos\lambda_0,$$

откуда Λ; H: R выражаются через остальные величины. Все это—пока для конуса, отнесенного к главным его осям. Далее Hill берет оси координат, указанные в настоящей работе при изложении способа Halphen'а (направление их—по главным осям орбиты возмущающей планеты и по перпендикуляру к ее плоскости), обозначает A, B, C; координаты центра притягивающей орбиты в этих осях и пишет уравнение проектирующего конуса в виде

$$z^2 : C^2 - \left[\left(x - \frac{A}{C}z\right) : a\right]^2 - \left[\left(y - \frac{B}{C}z\right) : b\right]^2 = 0,$$

а затем по правилам аналитической геометрии находит корни G_x; G_y G_z решающего уравнения 3-й степени и направляющие косинусы α; β γ главных осей конуса, причем само решающее уравнение имеет вид

$$\frac{A^2}{G+a^2} + \frac{B^2}{G+b^2} + \frac{C^2}{G} = 1,$$

а направляющие косинусы из уравнений

$$\alpha = \frac{A}{C}\cdot\frac{G_x}{G_x+a^2}\cdot\gamma; \quad \beta = \frac{B}{C}\cdot\frac{G_x}{G_x+b^2}\gamma; \quad \frac{1}{\gamma^2} = 1 +$$

$$+\frac{A^2}{C^2}\left(\frac{G_x}{G_x+a^2}\right)^2 + \frac{B^2}{C^2}\left(\frac{G_x}{G_x+b^2}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Выражая здесь A; B; C через a; b; G_x; G_y; G_z, получаем α^2; β^2; γ^2; в виде

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2(a^2-b^2)}\,\frac{G_x(G_x+b^2)(G_y+a^2)(G_z+a^2)}{(G_x-G_y)(G_x-G_z)},$$

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2(b^2-a^2)}\,\frac{G_x(G_x+a^2)(G_y+b^2)(G_z+b^2)}{(G_x+G_y)\ (G_x-G_z)},$$

$$\gamma^2 = -\frac{1}{a^2\ b^2}\,\frac{G_yG_z(G_x+a^2)(G_x+b^2)}{(G_x-G_y)(G_x-G_z)}$$ и т. д. круговой заменой букв x; y; z.

Hill условливается брать G_x; G_y; G_z так, чтобы $G_xG_yG_z = a^2\ b^2\ h^2$, что ввиду однородности конуса, конечно, допустимо.

Если теперь проекции силы притяжения кольца на оси симметрии притягивающей орбиты означить X'; Y'; Z', а на оси симметрии проектирующего конуса через X; Y; Z, то, конечно,

$$X' = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \text{ и т. д.}$$

Здесь в правых частях X; Y; Z берутся по простым формулам (см. ранее)

$$X = -\frac{M}{m^3}\sin^2 k\, x_0 \ldots\ldots \quad \text{и т. д.,}$$

причем в эти простые формулы вместо x_0; y_0; z_0 надо подставить

$$x_0 = (A + ae)\,\alpha + B\beta + C\gamma = (A + ae)\frac{A}{C}\cdot\frac{G_x}{G_x + a^2}\gamma + \frac{B^2}{C}\frac{G_x}{G_x + b^2}\gamma + \gamma C =$$

$$= \frac{\gamma G_x}{C}\left[\frac{A(A + ae)}{G_x + a^2} + \frac{B^2}{G_x + b^2} + \frac{C^2}{G_x}\right] = \frac{\gamma G_x}{C}\left(1 + \frac{Aae}{G_x + a^2}\right),$$

на основании кубического уравнения и аналогично

$$y_0 = (A + ae)\,\alpha' + B\beta' + C\gamma' = (A + ae)\frac{A}{C}\cdot\frac{G_y}{G_y + a^2}\gamma' + \frac{B^2}{C}\frac{G_y}{G_y + b^2}\gamma' +$$

$$+ C\gamma' = \frac{\gamma' G_y}{C}\left[\frac{A(A + ae)}{G_y + a^2} + \frac{B^2}{G_y + b^2} + \frac{C^2}{G_y}\right] = \frac{\gamma' G_y}{C}\left[1 + \frac{Aae}{G_y + a^2}\right]$$

и

$$z_0 = \frac{\gamma'' G_z}{C}\left(1 + \frac{Aae}{G_z + a^2}\right).$$

Тогда

$$X' = -\frac{M}{m^3}\sin^2 k\,\frac{\gamma G_x}{C}\left[1 + \frac{Aae}{G_x + a^2}\right]\frac{A G_x}{C(G_x + a^2)}\gamma - \frac{M}{m^3}\cos^2 k\,\frac{\gamma' G_y}{C}\left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{Aae}{G_y + a}\right)\frac{A}{C}\frac{G_y\gamma'}{G_y + a^2} + \frac{M}{m^3}\cdot\frac{\gamma'' G_z}{C}\left(1 + \frac{Aae}{G_z + a^2}\right)\frac{A}{C}\frac{G_z}{(G_z + a^2)}\gamma'' =$$

$$= \frac{A}{G_x + a^2}\left[-\frac{M}{m^3}\sin^2 k\,\frac{\gamma^2 G_x^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_x + a^2}\right)\right] + \frac{A}{G_y + a^2}\left[-\right.$$

$$\left. -\frac{M}{m^3}\cos^2 k\,\frac{\gamma'^2 G_y^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_y + a^2}\right)\right] + \frac{A}{G_z + a^2}\left[\frac{M}{m^3}\frac{\gamma''^2 G_z^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_z + a^2}\right)\right]$$

Если означить

$$U_x = -\frac{M}{m^3}\sin^2 k\,\frac{\gamma^2 G_x^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_x + a^2}\right);\quad U_y = -\frac{M}{m^3}\cos^2 k\,\frac{\gamma'^2 G_y^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_y + a^2}\right)$$

$$U_z = \frac{M}{m^3}\frac{\gamma''^2 G_z^2}{C^2}\left(1 + \frac{Aae}{G_z + a^2}\right),$$

то

$$X' = A\left[\frac{U_x}{G_x + a^2} + \frac{U_y}{G_y + a^2} + \frac{U_z}{G_z + a^2}\right];$$

$$Y' = B\left[\frac{U_x}{G_x + b^2} + \frac{U_y}{G_y + b^2} + \frac{U_z}{G_z + b^2}\right];$$

$$Z' = C\left[\frac{U_x}{G_x} + \frac{U_y}{G_y} + \frac{U_z}{G_z}\right].$$

Подставляя вместо γ^2; γ'^2; γ''^2 вышенаписанные выражения, Hill окончательно U_x; U_y; U_z дает в виде

$$U_x = -\frac{M}{m^7}\frac{\sin^2 k}{\sin^2\theta} G_x (G_x + a^2 + aeA)(G_x + b^2);$$

$$U_y = +\frac{M}{m^7}\frac{\cos^2 k}{\sin^2\theta\cos^2\theta} G_y (G_y + a^2 + aeA)(G_y + b^2);$$

$$U_z = +\frac{M}{m^7\cos^2\theta} G_z (G_z + a^2 + aeA)(G_z + b^2).$$

Если теперь в тех же осях координат, в которых взято X'; Y'; Z', вообразить из притягиваемой планеты (начала координат) три направления: 1) в Солнце; 2) в плоскости притягивающей орбиты перпендикулярно к 1-му направлению; 3) перпендикулярную к ним обоим, то угловые коэфициенты (направляющие косинусы) этих трех направлений будут, конечно:

$$1)\ (A+ae):r_0;\quad B:r_0;\quad C:r_0;\quad 2)\ -\frac{B}{\sqrt{r_0-C^2}};\ \frac{A+ae}{\sqrt{r_0^2-C^2}};\ 0;$$

$$3)\ -\frac{(A+ae)\,C}{r_0\sqrt{r_0^2-C^2}};\ -\frac{BC}{r_0\sqrt{r_0^2-C^2}};\ \frac{\sqrt{r_0-C^2}}{r_0}.$$

Если поэтому только что написанные выражения X'; Y'; Z' умножить соответственно и поочередно на направляющие косинусы этих 3-х направлений и в каждом семействе произведения сложить, то получатся проекции X''; Y''; Z'' силы притяжения кольца на только что указанные направления.

Если теперь через J обозначить угол наклона двух орбит друг к другу, то

$$R_0 + X'';\quad S_0 = Y''\cos J - Z''\sin I;\quad T_0 = Y''\sin J + Z''\cos J$$

будут интересующие нас величины.

Примечание автора. На мой взгляд J здесь не есть угол наклона орбит друг к другу в прежнем смысле этого слова (см. начало работы) и угол I будет меняться для 12 положений притягиваемой планеты.

В конце мемуара Hill дает рабочие формулы для решения кубического уравнения и приводит рассуждения о том, как из R_0; S_0; T_0 можно получить вековые возмущения элементов орбиты; разсуждения ведутся в духе Laplace'a.

По нашему мнению, красивый математический аппарат формул этого мемуара мало что удобного дает для практических вычислений: обилие нелогарифмических формул и пестроту букв в обозначениях.

Arndt в своем мемуаре вопрос излагает по существу дела почти так же, как Callandreau, только интегралы типа

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma + \Gamma_1\sin^2 T + \Gamma_2\cos^2 T}{(G - G_1\sin^2 T + G_2\cos^2 T)^{\frac{3}{2}}}\,dT$$

приводит к Weierstrass'овским обозначениям и умозаключает, что

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\Gamma\frac{G_1+G_2}{C}(e_1\omega+\eta) + \Gamma_1\frac{G+G_2}{C}(e_2\omega+\eta) + \Gamma_2\frac{G_1-G}{C}(e_3\omega+\eta)\right\}.$$

Решение уравнения 3-й степени для нахождения G; G_1; G_2 в конечном итоге здесь обходится путем, схожим со способом Halphen'a (вышеуказанное перемножение определителей; аппарат формул—32 формулы, из которых лишь последние восемь—без тригонометрических величин. Логарифмичности нет.).

Arndt четко говорит, что

$$F_\omega\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};1;x\right)=A_1F\left(\frac{1}{12};\frac{5}{12};\frac{1}{2};1-x\right)+$$
$$+B_1(1-x)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{11}{12};\frac{7}{12};\frac{3}{2};1-x\right);$$
$$F_\eta\left(\frac{7}{12};-\frac{1}{12};1;x\right)=A_2F\left(\frac{7}{12};-\frac{1}{12};\frac{1}{2};1-x\right)+$$
$$+B_2(1-x)^{\frac{1}{2}}F\left(\frac{5}{12};\frac{13}{12};\frac{3}{2};1-x\right),$$

и таким образом не делает той ошибки в аргументах $F(\alpha;-\beta;\gamma;x)$, которую допустил Halphen, но на ошибку Halphena не указывает.

Окончательные формулы имеют некоторое сходство с данными мною, напр.

$$P_1^2-3P_2=\lambda;\quad P_1P_2-9P_3=\rho;$$
$$g_2=\frac{4}{3}\lambda;\quad g_3=\frac{4}{27}(2P_1\lambda-3\rho),$$

но есть формулы вроде

$$B_1^{(R)}=-A_0(A_c e_1+r)+B_0\cos\varepsilon\,[e_1 r+A_c(1+e_1^2)]+A_s B_0\sin\varepsilon-A_c C_0 e_1;$$
$$\frac{\Lambda^{(R)}}{C}C^2=\frac{2}{3}\lambda P_2 r+\rho\left[B_1^{(R)}+\frac{1}{3}P_1 r\right];\ \frac{\Theta^{(R)}}{C}=\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\Lambda^R}{C}\rho+3\left(B_1^{(R)}+\frac{2}{3}P_1 r\right)\right];$$
$$R_0=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{(R)}}{C}\left(\omega-\eta.\frac{P_1}{3}\right)+\omega.\frac{\Theta^{(R)}}{C}\right\}.$$

Наконец Innes (M. N. May. 1907) исследование вопроса сначала ведет по Callandreau, затем эллиптические интегралы обрабатывает в духе Weierstrass'a, только гипергеометрические ряды в его исследование входят с другими аргументами:

$$\frac{2}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{9}}\frac{1}{2}\left(g_2\eta-\frac{3}{2}g_3\omega\right)=\frac{5}{8}\frac{1}{\lambda^{\frac{7}{4}}}.\frac{1}{\cos^2\frac{i}{2}}F\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6};2;\sin^2\frac{i}{2}\right);$$

$$\frac{2}{\pi}.\frac{1}{\sqrt{9}}.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}g_2^2\omega-G\,g_3\eta\right)=\frac{7}{8}\frac{1}{\lambda^{\frac{7}{4}}}.\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\cos^2\frac{i}{2}}F\left(-\frac{1}{6};\frac{7}{6};2;\sin^2\frac{i}{2}\right);$$

где

$$G=\frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2);\quad \lambda=\frac{3}{4}g_2=k_1^2-3k_2 \text{ и } \cos i=3\sqrt{3}.\frac{g_3}{g_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Тригонометрические функции—сначала до конца.

Innes частично по своим формулам проверил вычислениям Turner'a для возмущений Марса от Юпитера (Astr. Nachr. № 4068), которые Turner вел по формулам Arndt'a. Получилось совпадение результатов;

Innes также частично проверил вычисления Dziewulski'го (Cracovie, 1906), касающиеся возмущений Eros'а от Марса; получилось то же совпадение. Сам Arndt по своим формулам проделал пример вековых возмущений Меркурия от Венеры, проведенный Hill'ом в его 1-й цитированной мною работе, и получил результаты, тождественные с Hill'ом.

К недостатку или, пожалуй, к неполноте моей работы, следует отнести отсутствие таблиц, позволяющих найти $\Psi(\xi)$ и $\Psi'(\xi)$ для ξ от 0,5 до 0,1 при отрицательном g_3 (гипергеометрический ряд с логарифмическим членом).

В случае Цереры, как видно из вышеприведенных цифровых данных, это обстоятельство ни разу не попалось, что дает мне право думать, что в случае орбит малых планет, за редкими может быть исключениями, будет $g_3 > 0$. Выяснение условий, при которых $g_3 < 0$, могло бы быть темой для небезынтересной научной работы.

В заключение считаю приятным долгом выразить благодарность проф. Субботину, выдвинувшему эту тему, как актуальную для кафедры астрономии ТГУ и снабдившему меня экземпляром статьи Innes'а, которой нет в Томске, а также директору обсерватории Neuchâtel, любезно выславшему мне статьи Callandreau (две) и работу Arndt'а во временное пользование для ознакомления.

Несколько подробное изложение, увеличившее объем настоящей работы, преследует цель: дать возможно полный обзор данного вопроса, в то время как его литература по сие время довольно разбросана и не собрана воедино.

Томск, астрономический кабинет ТГУ.

27/XI-1935 года.

Zusammenfassung

Halphen's Mathode zur Berechnung der Säkalarstörungen der Planeten und ihre Anwendung zur Ceres.

Prof. N. Gorjatschew.

Die Methode von Halphen war langsam ohne Gebrauch wahrschein lich deshalb, weil Halphen hat einen Fehler in Argumenten der hyper geometrichen Reiche gemacht, *i*, *e*.

$$\Psi(\xi) = 2A\,F\left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right) - B.F\left(\frac{7}{12};\ \frac{7}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}}$$

statt

$$\Psi(\xi) = 2A\,F\left(\frac{1}{12};\ \frac{5}{12};\ \frac{1}{2};\ \xi\right) - BF\left(\frac{7}{12};\ \frac{11}{12};\ \frac{3}{2};\ \xi\right)\sqrt{\frac{\xi}{3}}$$

geschrieben!

Ausserdem glaubt Halphen, dass, wenn Argument in $\wp(u)$ um 2ω wächst, es wird ganzer Umlauf im Kegel gemacht werden. Das ist auch unrichtiq; selbstverständlich werden wir dann nur halben Umlauf machen; ausserdem sind einige Stücke im Sinne der Vorzeichen $+$ undeutlich ausgesprochen.

Indessen ist die Halphen'sche Methode mathematisch sehr elegant und ausserdem zur numerischen Rechnung sehr bequem, weil sie den grössten Theil der Rechnungen mit Hilfe des Arithmometers zu machen erlaubt.

Die elliptische Functionen, welche im Grunde der Theorie der Säkularstörungen immer liegen, sind in Halphen's Methode endlich ausgefallen und nur durch die Summen der hypergeometri'schen Reihen mit Konstanten Argumenten α; β; γ dargestellt. Für die Berechnung Solcher Summen sind die bequeme Tafeln aufgestellt.