УДК 510.22

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов

К АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Авторы предлагают модель вопенковской теории множеств. Модель строится в рамках нестандартного анализа.

Со времен Кантора фундаментом математики стала теория множеств. Основная идея канторовой теории множеств – это идея актуальной бесконечности: бесконечное множество рассматривается как завершенное, существующее со всеми своими элементами. Идее актуальной бесконечности противостоит идея потенциальной бесконечности: бесконечное множество мыслится как строящееся, порождающееся некоторым процессом.

Борьбу этих концепций бесконечного можно проследить на протяжении всей истории математики. Так, Гаусс был решительным противником использования актуальной бесконечности в математике.

Во второй половине XX века математики предпринимают попытки изменить фундамент математики – теорию множеств. Так возникла теория внутренних множеств, нестандартный анализ во многих вариантах. Сюда же относится и альтернативная теория множеств Вопенки.

Основная установка Вопенки – критика идеи актуальной бесконечности.

Теория множеств Вопенки [1] была задумана как альтернатива канторовой теории множеств с ее актуальной бесконечностью, чем и объясняется ее название. Поэтому построение модели альтернативной теории множеств в рамках теоретико-множественной модели нестандартного анализа Закона – Робинсона [2], то есть, в конечном счете, средствами классической теории множеств, выглядит несколько парадоксально.

Тем не менее такого рода модели могут быть полезны хотя бы тем, что позволяют использовать интуицию, накопленную в процессе работы с нестандартной моделью теории множеств, для лучшего осмысления альтернативных теорий.

Отметим некоторые отличия альтернативной теории множеств Вопенки от канторовой теории множеств.

В альтернативной теории различаются совокупности трех видов: множества, классы и полумножества. Все бесконечные множества равномощны. Каждое множество конечно по Кантору (то есть каждое множество равномощно некоторому начальному отрезку множества натуральных чисел).

В качестве интуитивного оправдания этих понятий своей теории множеств Вопенка приводит такой, возможно шутливый, пример. Совокупность человекообразных предков человека (не являющихся, следовательно, людьми) есть полумножество, не являющееся множеством. Они образуют подкласс множества приматов. В альтернативной теории множеств каждое множество, линейно упорядоченное некоторым отношением ρ (где ρ, в свою очередь, есть множество), обладает тем свойством, что каждое его непустое подмножество имеет наибольший и наименьший элементы. Если бы совокупность наших человекообразных предков была множеством, то существовала бы последняя обезьяна, то есть обезьяна, ребенок которой был бы человеком, что противоречит здравому смыслу. Аналогичные рассуждения применимы и к совокупности всех живущих в данный момент людей.

Существуют аксиоматизации альтернативной теории множеств [2]. Мы, однако, будем исходить из неформального подхода, изложенного в [1]. Нашей целью является построение модели теории множеств, близкой к альтернативной теории множеств Вопенки, средствами нестандартного анализа. В рамках этой модели основные понятия и факты альтернативной теории множеств Вопенки, на наш взгляд, становятся более естественными.

1. КОНСТРУКЦИИ УНИВЕРСУМОВ

Обозначим через $\boldsymbol{N}$ множество всех конечных ординалов (по фон Нойману). По построению, каждый элемент этого множества сам является конечным множеством.

Построим суперструктуру конечных множеств над $\boldsymbol{N}$. Обозначим через $\boldsymbol{PF(A)}$ множество всех конечных подмножеств множества A. Положим:

$$W_0(N)=N,\dots,W_{n+1}(N)=W_n\bigcup PF(W_n)\,,\ \dots$$

Множество $$W(N)=\bigcup_{n=1}^{\infty}W_n(N)$$

назовем суперструктурой конечных множеств. Множество $W_n(N)$ назовем n-м этажем суперструктуры $W(N)$.

Построим обычную суперструктуру над N со своими этажами:

$$V_0(N)=N,\dots V_{n+1}(N)=V_n\bigcup P(V_n)\,,\dots$$

$$V(N)=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n(N)\,,$$

где $P(A)$ есть булеан множества A. Очевидно, что $W_n(N)\subset V_n(N)$ ($n\in N$), $W(N)\subset V(N)$.

Пусть F есть свободный ультрафильтр над N. Если $A\in V(N)$, то через $*A$ обозначим ультрастепень A по ультрафильтру F.

Обозначим

$$*W(N)=\bigcup_{n=1}^{\infty}*W_n(N),\quad *V(N)=\bigcup_{n=1}^{\infty}*V_n(N).$$

Построим далее суперструктуру над $*N$ – внешний универсум $V(*N)$. Индукцией по номеру этажа строим, как обычно [4], вложение j универсума $*V(N)$ во внешний универсум $V(*N)$. Тем самым мы получим и вложение универсума $*W(N)$ во внешний универсум.

Как обычно, образ множества $*V(N)$ при отображении j назовем внутренним универсумом. Каждый элемент из $*V(N)$ мы отождествляем с его j-образом. Это можно сделать, поскольку отображение j переводит отношения равенства и принадлежности по ультрафильтру F в отношения равенства и принадлежности в теоретико-множественном смысле.

По построению, имеют место включения:

$$*V_n(N)\supseteq *W_n(N), *V(N)\supseteq *W(N).$$

2. МНОЖЕСТВА, ПОЛУМНОЖЕСТВА, КЛАССЫ

Рассмотрим теперь множество $U(N)$ всех подмножеств универсума $*W(N)$.

Элементы множества $*W(N)$ назовем *множествами,* элементы $U(N)$ – *классами.* Классы, не являющиеся множествами, назовем *собственными классами.*

Приведем пример множества. Пусть $\nu \in N$. Обозначим
$$[0, \nu] = \{n \in N \mid 0 \le n \le \nu\}.$$

По построению $W(N)$ имеем $\forall \nu \in N([0,\nu] \in W(N))$. По принципу переноса: $\forall \nu \in {}^*N([0,\nu] \in {}^*W(N)$, где $[0,\nu] = \{n \in {}^*N \mid 0 \le n \le \nu\}$. Следовательно, $[0, \nu]$ есть множество.

Классы A и B назовем *равномощными*, если существует биекция $f : A \to B$, где $f \in V({}^*N)$. Если биекция – внутренняя, то есть, $f \in {}^*V(N)$, то эти классы назовем *внутренне равномощными.* Классы равномощные, но не внутренне, назовем *внешне равномощными.*

Класс, равномощный классу N, назовем, как обычно, *счетным.*

Для каждого множества A существует такое $\nu \in {}^*N$, что A равномощно множеству $[0, \nu]$.

Каждое множество можно линейно упорядочить с помощью некоторого внутреннего бинарного отношения.

В самом деле, пусть $A \in W(N)$. Тогда для некоторого натурального k имеем $A \in W(N)$. Обозначим количество элементов множества A через $\nu \in N$. Из построения $W(N)$ легко следует, что найдется такое $s \in N$, что для каждого $A \in W_k(N)$ существует биекция $f : A \to [0, \nu], f \in W_s(N)$.

Итак,
$$\forall A \in W_k(N) \exists \nu \in N \exists f \in W_s(N)$$
$$(f \text{ есть биекция } A \text{ на } [0, \nu]).$$

Последнее утверждение легко записывается на языке первого порядка. По принципу переноса получаем
$$\forall A \in {}^*W_k(N) \exists \nu \in {}^*N \exists f \in {}^*W_s(N)$$
$$(f \text{ есть биекция } A \text{ на } [0, \nu]).$$

Отсюда следует, что естественный линейный порядок с $[0, \nu]$ переносится на A с помощью внутренней биекции f, следовательно, на A задается внутренний линейный порядок.

Если множество линейно упорядочено внутренним отношением r, то каждое непустое его подмножество имеет первый и последний элементы относительно этого порядка.

Доказательство получаем, аналогично предыдущему, по принципу переноса.

Каждый бесконечный начальный отрезок $[0, \nu]$, $\nu \in {}^*N \setminus N$, *множества ${}^*N$ имеет мощность континуума* [6].

В самом деле, пусть ν из ${}^*N$ бесконечно. Рассмотрим отображение $(0,1)$ в $[0, \nu]$: $f(r) = [r\nu]$, $r \in (0,1)$, где $[x]$ есть целая часть числа x.

Если $r_1 < r_2$, то
$$f(r_2) - f(r_1) = [r_2\nu] - [r_1\nu] \ge r_2\nu - 1 - r_1\nu = (r_2 - r_1)\nu - 1.$$

Итак, число $f(r_2) - f(r_1)$ бесконечно велико. Значит, $f(r_2) \ne f(r_1)$. Следовательно, f есть инъекция $(0, 1)$ в $[0, \nu]$. Поэтому мощность множества $[0, \nu]$ не меньше мощности континуума.

С другой стороны, мощность ${}^*N$ не превосходит мощности континуума [5], $[0,\nu] \subset {}^*N$. Итак, мощность $[0,\nu]$ равна мощности континуума.

Никакой счетный класс не является множеством.

Пусть A – счетный класс. Поскольку множество $[0,\nu], \nu \in {}^*N$, или конечно, или несчетно [6], то A не равномощно отрезку $[0,\nu]$ ни при каких $\nu \in {}^*N$. Следовательно, A не есть множество.

Приведем пример класса, не являющегося множеством. Имеем $N \in U(N)$, N есть счетный класс. Итак, N не есть множество.

Подкласс множества называется *полумножеством*. Полумножество называется *собственным*, если оно не является множеством.

Пусть $\nu \in {}^*N \setminus N$. Так как $N \subset [0,\nu]$ и $[0,\nu]$ есть множество, то N есть собственное полсобственное полумножество. Так как A – множество, то для некоторого $\nu \in {}^*N$ имеем: сущеумножество.

Класс, включающий собственное полумножество, называется *бесконечным.*

Каждое бесконечное множество включает счетное полумножество.

В самом деле, пусть A есть бесконечное множество. Тогда A включает некоторое $f \in {}^*W(N)$ множества $[0,\nu]$ на A. Ясно, что $\nu \in {}^*N \setminus N$, иначе A не включало бы собственного полумножества. Но тогда $N \subseteq [0,\nu]$, и образ B класса N при отображении f есть счетный подкласс множества A. Значит, B есть счетное полумножество, входящее в A.

Все бесконечные множества внешне равномощны.

В самом деле, пусть A, B – бесконечные множества. По предыдущему, A равномощно $[0,\nu]$, B равномощно $[0,\nu_1]$, где $\nu, \nu_1 \in {}^*N \setminus N$. Но все множества $[0,\nu]$, где $\nu \in {}^*N \setminus N$, внешне равномощны [6]. Следовательно, равномощны и множества A и B.

Каждый счетный класс есть собственное полумножество.

Пусть A есть счетный (и, следовательно, собственный) класс. Тогда существует биекция $f : N \to A, f \in V({}^*N)$. Итак, $A = f(N) \in V({}^*N)$. Поэтому существует такое n натуральное, что $A \subset V_n({}^*N)$. Так как A – класс, то $A \subset {}^*W(N)$. Значит, $A \subset {}^*W_n(N)$.

Итак, A есть полумножество.

Собственный класс, равномощный некоторому множеству, есть полумножество.

Доказательство аналогично предыдущему, только в роли N выступает теперь некоторое множество из универсума ${}^*W(N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир,1983.
2. *Proceedings* of the 1st symposium “Mathematics in the internal Set Theory”. Bratislava, USFR, 1989.
3. *Mattes J.* Axiomatic approaches to nonstandard analysis. Jahrbuch der Kurt G»del Geselschaft, 1992. P. 61 – 79.
4. *Robinson A. and Zakon E.* A set-theoretical characterization of enlargements, in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and probability / W. A. J. Luxemburg (ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969. P. 109 – 122.
5. *Chang S.S. and Keisler H.G.* Model theory. North-Holland, Amsterdam, 1990.
6. *Галанова Н.Ю.* О конфинальности *N // Региональная науч.-практич. конф. Естественные науки. Томск, 1994. С. 74.

Статья представлена кафедрой математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета, поступила в научную редакцию «Математика» 18 мая 2005 г.