На правах рукописи

Арбит Александр Владимирович

# РАВНОМЕРНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

01.01.01– математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2005

Работа выполнена на кафедре теории функций
Томского государственного университета

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | доктор физико-математических наук, профессор **Гулько Сергей Порфирьевич** |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук, профессор **Гутман Александр Ефимович** |
| | кандидат физико-математических наук, доцент **Сибиряков Геннадий Васильевич** |
| **Ведущая организация:** | Институт математики и механики УрО РАН |

Защита диссертации состоится 19 ноября 2005 г. в часов на заседании диссертационного Совета К 212.267.05 при Томском государственном университете по адресу: 634050, Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Томского государственного университета.

Автореферат разослан октября 2005 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент **А.Н.Малютина**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** При установлении различного рода инвариантности некоторых топологических свойств часто используются многозначные отображения, порождаемые гомеоморфизмами пространств непрерывных функций ($C_p$-пространств), причём свойства этих отображений зависят от того, какой гомеоморфизм их порождает (произвольный, линейный, равномерный). Такого типа конечнозначные отображения были определены О.Г.Окуневым [7] для доказательства *t*-инвариантности спрэда, наследственной плотности и наследственного числа Линделёфа. Используя различные варианты таких отображений, С.П.Гулько [1] доказал *u*-инвариантность размерности, а Н.В.Величко [8] доказал *l*-инвариантность свойства Линделёфа.

В $C_p$-теории особенно много вопросов связано с *u*-инвариантностью тех или иных топологических свойств, то есть тех, которые сохраняются отношением *u*-эквивалентности. В настоящее время установлена *u*-инвариантность таких фундаментальных свойств, как компактность (В.В.Успенский, [2]), размерность (С.П.Гулько, [1]). В то же время остаётся множество нерешённых проблем, например, является ли свойство Линделёфа *u*-инвариантом. Для ответа на этот вопрос и ему подобные автором было построено семейство $\left\{\mathrm{supp}_\varepsilon : X \to \mathrm{Fin}Y :\ \varepsilon > 0\right\}$ конечнозначных отображений пространства $X$ в $Y$, которые возникают при равномерно непрерывном отображении пространства $C_p(Y)$ в $C_p(X)$. Эти отображения строятся аналогично построенным О.Г.Окуневым [7] для случая *t*-эквивалентности пространств $X$ и $Y$ (обозначение было введено им же). Как оказалось, они тесно связаны с конечнозначным отображением, построенным С.П.Гулько в [1], а ряд замечательных свойств, которыми они обладают, даёт возможность использовать эту конструкцию для доказательства *u*-инвариантности различных топологических свойств.

Другой вопрос, на который была попытка ответить в диссертации, это проблема адаптации спектральной теоремы Е.В.Щепина [3] для применения к пространствам непрерывных функций. Эта теорема применима к компактам, раскладывающимся в регулярные обратные спектры, и используется для доказательства негомеоморфности некоторых топологических пространств, например, пространств $D^{\aleph_2}$ и $\exp D^{\aleph_2}$ (Е.В.Щепин, [3]). Если же возникает необходимость доказать негомеоморфность пространств $C_p(X)$ и $C_p(Y)$, то спектральная теорема «в чистом виде» неприменима, так как пространства непрерывных функций не разлагаются в регулярные обратные спектры. Тем не менее оказалось возможным использовать общую схему рассуждений, связанную со спектральной теоремой и доказать её аналог, применимый к пространствам функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ над некоторыми пространствами специального вида.

И, наконец, ещё одна тема, затронутая в диссертации, это вопрос о различении отношений *l*- и *u*-эквивалентности, поставленный А.В.Архангельским в [4]. В работе [6] С.П.Гулько установил, что отрезки ординалов $[1,\omega]$ и $[1,\omega^{\omega}]$ *u*-эквивалентны. Этот результат явился ответом на вопрос А.В.Архангельского, поскольку эти отрезки ординалов не являются *l*-эквивалентными (Ч.Бессага и А.Пелчинский, [5]). Другими словами, если Г – счётное дискретное пространство,

$\alpha\Gamma$ – его одноточечная александровская компактификация, то $\alpha\Gamma$ и $\alpha\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\alpha\Gamma)^n\right)$ *u*-эквивалентны, но не *l*-эквивалентны. Автором обобщается результат, полученный С.П.Гулько, для случая дискретного пространства $\Gamma$ произвольной мощности, что даёт нам целый класс примеров, различающих отношения *l*- и *u*-эквивалентности.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является исследование равномерных гомеоморфизмов пространств непрерывных функций путём нахождения примеров пространств, различающих отношения *l*- и *u*-эквивалентности, примеров пространств, не являющихся *u*-эквивалентными, а также выявления топологических свойств, являющихся *u*-инвариантами.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

- Построено полунепрерывное снизу счётнозначное отображение $\mathrm{supp}: X \to 2^Y$ пространства $X$ в $Y$, порождаемое равномерным гомеоморфизмом пространств функций $C_p(Y)$ и $C_p(X)$, описаны его свойства.
- Получен аналог спектральной теоремы Е.В.Щепина, применимый к пространствам функций $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ над некоторыми пространствами специального вида.
- Построен класс примеров пространств, различающих отношения *l*- и *u*-эквивалентности, являющийся обобщением примера, полученного С.П.Гулько [6].

**Практическая и теоретическая ценность.** Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях равномерных гомеоморфизмов $C_p$-пространств, а также при чтении спецкурсов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.), на XLII и XLIII Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2004 г. и 2005 г.), на топологическом семинаре в ИММ УрО РАН (Екатеринбург, 2005 г.). Основные результаты неоднократно докладывались на семинарах кафедры теории функций Томского государственного университета. По теме диссертации имеется 5 публикаций.

**Структура и объём работы.** Представляемая диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, трёх глав и списка литературы. Первая глава содержит два параграфа, вторая и третья главы – по три параграфа. Полный объём диссертации составляет 75 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава состоит из двух параграфов.

В начале первого параграфа вводятся основные определения.

**Определение.** *Пусть $X$ – топологическое пространство. Линейное подпространство $A \subset R^X$ будем называть достаточным, если для любой точки $y \in X$, любой её открытой окрестности $O_y$ и любых* *двух функций* $f_1, f_2 \in A$ *найдётся функция* $f \in A$, *такая, что* $f(y) = f_2(y)$ *и* $f(x) = f_1(x)$ *для всех* $x \in X \setminus O_y$.

*Точку* $x \in X$ *будем называть нуль-точкой семейства* $A \subset R^X$, *если* $f(x) = 0$ *для всех* $f \in A$. *Множество всех нуль-точек семейства A будем обозначать* $\ker A$.

**Определение.** *Пусть X, Y - топологические пространства, A, B – достаточные линейные подпространства пространств* $R^X$ *и* $R^Y$ *соответственно,* $h : B \to A$ *– равномерный гомеоморфизм, переводящий нулевую функцию* $0_Y \in B$ *в нулевую функцию* $0_X \in A$. *Зафиксируем точку* $x \in X$ *и* $\varepsilon > 0$. *Точку* $y \in Y$ *будем называть ε-существенной для x (относительно гомеоморфизма h), если для любой окрестности* $O_y$ *точки y существуют функции* $g', g'' \in B$, *совпадающие на множестве* $Y \setminus O_y$, *для которых выполняется неравенство* $\left| h(g')(x) - h(g'')(x) \right| > \varepsilon$.

*Точку y, не являющуюся ε-существенной для x, будем называть ε–несущественной для x. Множество всех ε-существенных точек для точки x будем называть ε–носителем точки x (относительно гомеоморфизма h ) и будем обозначать его* $supp_\varepsilon^h x$. *Объединение всех ε-носителей точки x ( относительно гомеоморфизма h ) по всем* $\varepsilon > 0$ *будем называть носителем точки x ( относительно гомеоморфизма h ) и будем обозначать его* $supp^h x$. *Если известно, о каком гомеоморфизме h идёт речь, будем писать просто* $supp_\varepsilon x$ *(* $supp\, x$, *соответственно).*

Далее в параграфе 1 формулируются свойства построенных множеств.

*(i)* $supp_\varepsilon x$ *– непустое конечное подмножество из Y (при* $x \notin \ker A$*);*

*(ii)* $supp : X \to 2^Y$ *есть счётнозначное, полунепрерывное снизу отображение.*

Затем приводятся известные результаты, используемые в доказательстве этих свойств, а также само доказательство, которое приведено в параграфе 2. Также приводится и доказывается следующее свойство носителя.

**Теорема 1.2.6.** *Пусть* $x \in X$. *Справедливы следующие утверждения:*

*(а) Если функции* $g', g'' \in B$ *совпадают на множестве* $supp\, x$, *то* $h(g')(x) = h(g'')(x)$.

*(б) Если F – замкнутое подмножество из Y, такое, что для любых двух функций* $g', g'' \in B$, *совпадающих на множестве F, выполняется равенство* $h(g')(x) = h(g'')(x)$, *то* $supp\, x \subset F$.

Во второй главе рассматривается вопрос адаптации спектральной теоремы Е.В.Щепина для применения к пространствам непрерывных функций. В начале первого параграфа этой главы вводятся определения.

**Определение.** *Семейство ретракций* $\{r_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ *на пространстве X (где* $\omega(\tau)$ *– первый ординал регулярной несчётной мощности* $\tau$*) будем называть*

*(R1) коммутативным, если* $r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_\alpha$ *для любых* $\alpha \le \beta < \omega(\tau)$*;*

*(R2) сжимающим, если* $nw(r_\alpha[X]) < \tau$ *для всех* $\alpha < \omega(\tau)$*;*

*(R3) поточечно непрерывным, если* $\lim\limits_{\alpha \to \overline{\alpha}} r_\alpha(x) = r_{\overline{\alpha}}(x)$ *для любого предельного ординала* $\overline{\alpha} < \omega(\tau)$ *и для любого* $x \in X$*;*

*(R4) разделяющим, если для любых двух различных точек* $x', x'' \in X$ *существует ординал* $\alpha < \omega(\tau)$*, такой, что* $r_\alpha(x') \neq r_\alpha(x'')$*;*

*(R5) покрывающим, если* $X = \bigcup\limits_{\alpha < \omega(\tau)} X_\alpha$*;*

*(R6) порождающим топологию, если семейство*

$\mathcal{B} = \left\{ r_\alpha^{-1}[r_\alpha[G]] : G \text{ - открытое множество в } X, \alpha < \omega(\tau) \right\}$

*является открытой базой топологии на X;*

*(R7) сопряжённо покрывающим, если сопряжённое семейство ретракций* $\{r_\alpha^* : \alpha < \omega(\tau)\}$ *является покрывающим;*

*(R8) сопряжённо порождающим, если сопряжённое семейство ретракций* $\{r_\alpha^* : \alpha < \omega(\tau)\}$ *является порождающим топологию.*

**Определение.** *Семейство ретракций на пространстве X будем называть проекционным разложением единицы и сокращённо обозначать ПРЕ, если оно коммутативное, сжимающее и поточечно непрерывное. Семейство ретракций будем называть расслаивающим проекционным разложением единицы и сокращённо обозначать РПРЕ, если оно коммутативное, сжимающее, поточечно непрерывное и сопряжённо покрывающее.*

Главным результатом параграфа 1 является

**Теорема 2.1.4 (проекционная теорема).** *Пусть* $\{p_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$, $\{q_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ *– РПРЕ на пространствах X и Y соответственно, и* $h : X \to Y$ *– гомеоморфизм. Тогда множество B(h) тех* $\alpha$*, что* *отображение* $g_\alpha = q_\alpha \circ h \circ p_\alpha^{-1} : X_\alpha \to Y_\alpha$ *является гомеоморфизмом, замкнуто в* $[1, \omega(\tau))$ *и конфинально* $\omega(\tau)$.

Далее выясняются условия существования РПРЕ на пространствах определённого вида. В параграфе 2 получены условия существования РПРЕ на компактах. Они сформулированы в следующем

**Следствии 2.2.3.** *Каждое разделяющее ПРЕ на компакте является РПРЕ.*

Затем приводится ещё один вариант доказательства того факта, что компакты $D^{\aleph_2}$ и $\exp D^{\aleph_2}$ не гомеоморфны. При этом используются следствие 2.2.3 и теорема 2.1.4.

В параграфе 3 получены необходимые и достаточные условия существования РПРЕ на $C_p$-пространствах. Этот критерий приведён в следующей

**Теореме 2.3.10.** *Пусть* $\Gamma = \{r_\alpha : \alpha < \omega(\tau)\}$ – *ПРЕ на пространстве X. Порождаемое им сопряжённое семейство ретракций* $\Gamma^* = \{r_\alpha^* : \alpha < \omega(\tau)\}$ *на пространстве* $\widetilde{X} = C_p(X)$ *является РПРЕ тогда и только тогда, когда семейство Г – покрывающее.*

Третья глава посвящена доказательству того факта, что пространства $\alpha\Gamma$ и $\alpha\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\alpha\Gamma)^n\right)$ *u*-эквивалентны, но не *l*-эквивалентны (где Г – дискретное пространство, $\alpha\Gamma$ – его одноточечная александровская компактификация). В начале параграфа 1 вводятся новые понятия, которые впоследствии используются для доказательства основного результата главы.

*Для многозначного отображения* $R : X \to \exp Y$ *и множества* $A \subset X$ *условимся обозначать* $R[A] \overset{def}{=} \bigcup_{x \in A} R(x)$. *Если* $R_1 : X \to 2^Y$ *и* $R_2 : Y \to 2^Z$ – *многозначные отображения, то их композицией мы будем называть многозначное отображение* $R_2 \circ R_1 : X \to 2^Z$, *определённое формулой* $R_2 \circ R_1(x) = R_2[R_1(x)],\ x \in X$. *Аналогичным образом определяется композиция любого (конечного) числа многозначных отображений.*

***Определение.*** *Пусть* $F$ – *замкнутое подмножество пространства* $X$. *Многозначное, непрерывное в топологии Вьеториса отображение* $R : X \to \exp F$ *будем называть многозначной ретракцией, если* $R[X] = F$ *и* $x \in R(x)$ *для всех* $x \in X$.

*Для каждой многозначной ретракции* $R : X \to \exp F$ *определим отображение* $\overset{\circ}{R} : X \to 2^F$, *действующее по формуле* $\overset{\circ}{R}(x) = R(x) \setminus \{x\},\ x \in X$. *Такое отображение будем называть проколотой ретракцией.*

***Определение.*** *Пусть X – компакт, F – замкнутое подмножество в X,* $x_0$ – *точка из F, n – натуральное число. Многозначную ретракцию* $R : X \to \operatorname{Fin} F$ *будем называть декартовой ретракцией порядка n с центром в точке* $x_0$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

*(CR1)* $\underbrace{\overset{\circ}{R} \circ \ldots \circ \overset{\circ}{R}}_{n}[F] = \{x_0\}$,

*(CR2)* $R(x) = \{x\}$ *тогда и только тогда, когда* $x = x_0$.

*Пространство X будем называть декартовым, если на нём существует декартова ретракция.*

В подразделах 1.1 и 1.2 параграфа 1 описаны примеры декартовых пространств – конечная тихоновская степень компактного пространства и пространство вида $exp_n X$ .

Главным результатом второго параграфа является

**Теорема 3.2.2.** *Пусть X - компакт, F – замкнутое подмножество в X,* $\overline{0}$ *– точка из F,* $R : X \to Fin\, F$ *– декартова ретракция порядка n с центром в точке* $\overline{0}$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует равномерный гомеоморфизм*

$$S_\delta : C_p\left(X \middle| \{\overline{0}\}\right) \to C_p\left(F \middle| \{\overline{0}\}\right) \times C_p\left(X \middle| F\right),$$

*такой, что для всех* $f \in C_p\left(X \middle| \{\overline{0}\}\right)$ *выполняется неравенство*

$$(1+\delta)^{-1}\|f\| \le \|S_\delta(f)\| \le \|f\|.$$

(символом $C_p(X|A)$ обозначается пространство всех непрерывных функций на *X*, равных нулю на множестве *A*, наделённое топологией поточечной сходимости).

Эта теорема явилась основным инструментом в доказательстве главного результата третьей главы, который доказан в третьем параграфе. Этим результатом является следующая

**Теорема 3.3.5.** *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует равномерный гомеоморфизм*

$$S_\varepsilon : C_p\left(\alpha\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}(\alpha\Gamma)^n\right)\right) \to c_0(\Gamma),$$

*такой, что для любой функции* $f \in C_p\left(\alpha\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}(\alpha\Gamma)^n\right)\right)$ *выполняется неравенство*

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|f\| \le \|S_\varepsilon(f)\| \le \|f\|.$$

Эта теорема обеспечивает $u$-эквивалентность пространств $\alpha\Gamma$ и $\alpha\left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}(\alpha\Gamma)^n\right)$. Завершает главу теорема 3.3.8, из которой следует, что вышеупомянутые пространства не являются $l$-эквивалентными.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Сергею Порфирьевичу Гулько за постановку задач, полезные обсуждения и помощь в оформлении диссертации.

**Литература**


1. Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова. АН СССР. 1992. Т. 193. С. 82-88.
2. Успенский В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций // УМН. 1982. Т. 37, №4. С.183-184.
3. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчётных обратных спектров // УМН. 1976. Т. 31, № 5. С.191-226.
4. Archangelskij A.V. On relationship between topological properties of $X$ and $C_p(X)$ // Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5. Berlin, 1985. P. 24-36.
5. Bessaga C., Pelczynski A. Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia math. 1960. V. 19. P. 53-62.
6. Gul'ko S.P. The space $C_p(X)$ for countable infinite compact X is uniformly homeomorphic to $c_0$ // Bull. Acad. Polon. sci. ser. Math. 1990.
7. Okunev O. Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants // Topol. and its Appl. 1997. Vol 80. P. 177-188.
8. Velichko N.V. The Lindelof property is *l*-invariant // Topol. and its Appl. 1998. Vol 89. P. 277-283.

**Работы автора по теме диссертации**


1. Арбит А.В. О многозначных отображениях, порождаемых равномерными гомеоморфизмами пространств непрерывных функций // Международная конференция по математике и механике. г.Томск. 16-18 сентября 2003. – Томск: ТГУ, 2003. С. 45-49.
2. Арбит А.В. Об одной модификации понятия *u*-эквивалентности топологических пространств // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер. математика, кибернетика, информатика. 2004. Т.284. С.8-12.
3. Арбит А.В. Примеры разреженных компактов, различающие отношения *l*- и *u*-эквивалентности // Материалы XLIII Международной науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2005. С.59.
4. Арбит А.В. Об одном аналоге спектральной теоремы Щепина // Том. гос. ун-т. – Томск, 2005. – 27 с. – Библиогр.: 9 назв. – Деп. в ВИНИТИ 20.07.05, № 1054-В2005.
5. Арбит А.В. Об одном примере разреженных компактов, различающем отношения *l*- и *u*-эквивалентности // Том. гос. ун-т. – Томск, 2005. – 49 с. – Библиогр.: 5 назв. – Деп. в ВИНИТИ 20.07.05, № 1053-В2005.