

На правах рукописи



Шермет Михаил Александрович

**СОПРЯЖЕННЫЙ КОНВЕКТИВНО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В
ЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ С ЛОКАЛЬНО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ
ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2006

Работа выполнена на механико-математическом факультете
ГОУ ВПО “Томский государственный университет”

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Кузнецов Гений Владимирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Матвиенко Олег Викторович

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Либин Эдуард Ефимович

Ведущая организация: Институт теплофизики СО РАН

Защита диссертации состоится “3” июля 2006 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан “26” мая 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор технических наук



Ю.Ф. Христенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение теплопереноса в неоднородных средах имеет большое значение при моделировании и оптимизации физических процессов, связанных с производством и рациональным использованием энергии. Общим для этих процессов является наличие, по крайней мере, двух компонент среды (твердое тело и жидкость). Поэтому возникают задачи сопряженного теплообмена, т.е. совместного моделирования теплопереноса как в жидкой фазе, так и в связанных с ней элементах твердой фазы.

Усложнение технических устройств и неотложность многих проблем энергетики и охраны окружающей среды привели к тому, что в последние годы исследование сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса было связано с очень широким кругом задач: проблема отвода тепла во многих приборах, процессах и системах; анализ сопряженного теплопереноса в ядерных энергетических установках, в газовых турбинах при обтекании поверхности; проектирование надежных топливных систем летательных аппаратов нового поколения; моделирование и эксплуатация современных средств транспортировки и хранения вязких нефтепродуктов и т.д.

Каждой из таких задач присущи свои требования к точности определения и полноте моделирования конкретных процессов.

Известны результаты решения ряда важных для практики и теории задач сопряженного теплопереноса (В.И. Терехов, В.В. Иванов, С.Г. Черкасов). Но в этих работах рассматривается или одномерная постановка, в которой влияние свободной конвекции учитывается в граничных условиях III рода, или осесимметричная постановка с учетом одномерного кондуктивного теплопереноса в ограждающих конструкциях.

На сегодняшний день одной из актуальных проблем является теплоэнергосбережение. Решение ее представляет собой достаточно сложную и комплексную задачу. Комплексность заключается в том, что обычно необходимо не только смоделировать рассматриваемый процесс, но и на основе выполненного анализа предложить варианты решения проблемы теплоэнергосбережения. Эмпирический анализ технологических систем теплоснабжения дает лишь стационарные данные, относящиеся к конкретному рассматриваемому объекту и определенному моменту времени, и не позволяет оценить динамику процесса, которая на практике имеет большое значение. Поэтому эффективным инструментом решения подобного рода задач является применение методов математического моделирования для описания комплекса процессов, протекающих в реальных системах-потребителях тепловой энергии.

По этим причинам исследование закономерностей сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутых областях является актуальной и неизученной до настоящего времени задачей.

Исследования выполнялись по проекту совместного конкурса фундаментальных научных исследований РФФИ и Администрации Томской области в 2005 году (№ 05-02-98006, конкурс р_объ_а) "Математическое

моделирование процесса теплопереноса в объектах теплоснабжения с учетом взаимодействия с окружающей средой”.

Цель работы заключается в математическом моделировании нестационарного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутых областях (плоская и пространственная постановки) с локально сосредоточенными источниками тепловыделения и неоднородными граничными условиями при конвективно-радиационном теплообмене с внешней средой.

Научная новизна работы. Впервые получено решение задачи сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса при наличии локальных источников температурной неоднородности для области, состоящей из элементов с различными теплофизическими характеристиками. Также впервые учитывается конвективно-радиационный теплообмен с внешней средой на одной из границ.

Практическая значимость. Создан вычислительный комплекс для моделирования сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутых областях с распределенными источниками тепловыделения, а также с учетом конвективно-радиационного теплообмена на одной из внешних границ.

Полученные новые численные результаты могут быть использованы для совершенствования существующих методик расчета теплового состояния промышленных и социальных объектов, а также позволят прогнозировать оптимальный режим теплоснабжения. Разработанная математическая модель может быть применена для определения параметров теплового режима объекта теплоснабжения в условиях его “идеальной теплозащиты”. Соответственно созданный математический аппарат может быть использован при разработке нормативов по теплоснабжению объектов жилого фонда социального и промышленного назначения. При этом могут быть учтены факторы старения материалов ограждающих конструкций, износ систем отопления и ряд других.

Степень достоверности результатов проведенных исследований.

Обоснованность научных положений и выводов, сформулированных в работе, заключается в следующем:

достоверность подтверждается результатами тестирования разработанных метода и алгоритма на решении ряда менее сложных задач и сопоставлением результатов с экспериментальными данными и теоретическими исследованиями других авторов, опубликованных в международных журналах: *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, *Applied Thermal Engineering*.

Автор защищает:

1. Новую математическую модель в переменных “векторный потенциал – вектор завихренности – температура” для описания сопряженного теплопереноса в замкнутом объеме.
2. Алгоритм решения задач сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутых областях, состоящих из элементов с различными теплофизическими характеристиками, при наличии источников температурной неоднородности.
3. Результаты численного моделирования нестационарного сопряженного теплообмена в замкнутых областях.

4. Выводы по сопоставлению результатов моделирования сопряженного теплопереноса в плоской и пространственной постановках.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003), на III семинаре вузов Сибири и Дальнего Востока по теплофизике и теплоэнергетике (Барнаул, 2003), на 6-й Всероссийской научной конференции “Краевые задачи и математическое моделирование” (Новокузнецк, 2003), на 9-й Всероссийской научно-технической конференции “Энергетика: экология, надежность, безопасность” (Томск, 2003), на V Минском международном форуме по тепло- и массообмену (Минск, 2004), на Международной конференции “Сопряженные задачи механики, информатики и экологии” (Горно–Алтайск, 2004), на XXVII Сибирском теплофизическом семинаре (Новосибирск, 2004), на 4-й Всероссийской конференции “Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики” (Томск, 2004), на молодежной конференции “Устойчивость течений гомогенных и гетерогенных жидкостей” (Новосибирск, 2005), на XV Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева “Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках” (Калуга, 2005), на 14-й Всероссийской школе-конференции молодых ученых “Математическое моделирование в естественных науках” (Пермь, 2005), на XXVIII Сибирском теплофизическом семинаре (Новосибирск, 2005).

Публикации. Основные результаты диссертации представлены в 21 работе, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы, включающего 142 наименования, содержит 67 рисунков, 5 таблиц – всего 188 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель работы, показана новизна и практическая значимость полученных результатов, представлены положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена анализу современного состояния исследований в области сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса.

Установлено, что в настоящее время математическое моделирование сопряженного теплопереноса в замкнутых областях переживает этап становления. В большей мере проводится анализ только плоских задач при отсутствии каких-либо внутренних температурных неоднородностей. При этом теплообмен с внешней средой или не учитывается (условия теплоизоляции), или учитывается опосредованно (граничные условия I рода).

Во **второй главе** представлены физическая, геометрическая и математическая модели сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области (рис. 1) с локальным источником тепловыделения при условии конвективно-радиационного теплообмена с окружающей средой на одной из внешних границ.

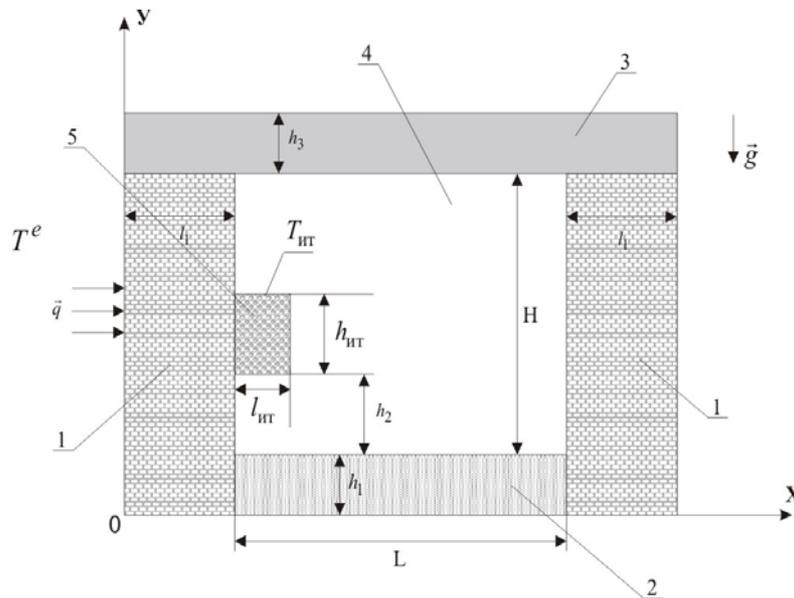


Рис. 1 – Область решения рассматриваемой задачи: 1, 2, 3 – элементы твердой стенки, 4 – газ, 5 – источник тепловыделения

При проведении численного анализа предполагалось, что теплофизические свойства газа и элементов стенки не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Газ считается ньютоновской жидкостью, несжимаемой и удовлетворяющей приближению Буссинеска.

Движение газа и теплоотдача в полости принимаются двумерными, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенками – пренебрежимо малым по сравнению с конвективным теплообменом, а газ абсолютно прозрачным для теплового излучения.

В такой постановке процесс переноса тепла в области решения описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в приближении Буссинеска для газа и уравнением теплопроводности для элементов твердой стенки с нелинейными граничными условиями.

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных “вихрь скорости – функция тока – температура” для рассматриваемой задачи имеют вид:

- в газовой полости:

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Gr}} \Delta \Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\Delta \Psi = -2 \cdot \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr \cdot \sqrt{Gr}} \Delta \Theta, \quad (3)$$

- для элементов твердой стенки:

$$\frac{1}{Fo_i} \frac{\partial \Theta_i}{\partial \tau} = \Delta \Theta_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь X, Y – безразмерные декартовы координаты; τ – безразмерное время; U, V – безразмерные скорости; $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ит}} - T_0)$ – безразмерная температура; T_0 – начальная температура рассматриваемой области решения; $T_{\text{ит}}$ – температура на источнике тепловыделения; Ψ – безразмерный аналог функции тока; Ω – безразмерный аналог вектора вихря; Δ – оператор Лапласа; $\text{Sh} = V_0 t_0 / L$ – число Струхалия; t_0 – масштаб времени; V_0 – масштаб скорости (скорость конвекции); $\text{Gr} = \beta g_y L^3 (T_{\text{ит}} - T_0) / \nu^2$ – число Грасгофа; ν – коэффициент кинематической вязкости; β – температурный коэффициент объемного расширения; $\text{Pr} = \nu / a$ – число Прандтля; a_i – коэффициент теплопроводности i -ой подобласти; $\text{Fo}_i = a_i t_0 / L^2$ – число Фурье, соответствующее i -ой подобласти.

Начальные условия для системы уравнений (1) – (4):

$$\begin{cases} \Psi(X, Y, 0) = \Omega(X, Y, 0) = 0; \\ \Theta_i(X, Y, 0) = 0; \quad i = \overline{1, 4}; \quad \Theta_4 \equiv \Theta \text{ в ур. (3) - температура в газовой полости}; \\ \Theta(X, Y, 0) = 1 \text{ при } \frac{h_1 + h_2}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L}, \quad \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1 + l_{\text{ит}}}{L}. \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия для системы уравнений (1) – (4) на внешних границах области решения:

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, \tau)}{\partial X} = \text{Bi}_i \cdot \Theta_i(X, Y, \tau) + \text{Bi}_i \cdot \frac{T_0 - T^e}{T_{\text{ит}} - T_0} + Q_i, \quad (6)$$

где $Q_i = N_i \cdot \left[\left(\Theta_i(X, Y, \tau) + \frac{T_0}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 - \left(\frac{T^e}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 \right]$,

$$i = 1, 3, \quad \text{при } X = 0, \quad 0 \leq Y \leq \frac{h_1 + H + h_3}{L}, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0};$$

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad i = 1, 3, \quad \text{при } X = \frac{2l_1}{L} + 1, \quad 0 \leq Y \leq \frac{h_1 + H + h_3}{L}, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta_i(X, Y, \tau)}{\partial Y} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } Y = 0, \quad 0 \leq X \leq \frac{2l_1}{L} + 1, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Theta_3(X, Y, \tau)}{\partial Y} = 0, \quad \text{при } Y = \frac{h_1 + H + h_3}{L}, \quad 0 \leq X \leq \frac{2l_1}{L} + 1, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (9)$$

на внутренних границах области решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(X, Y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial X}(X, Y, \tau) = 0, \\ \Theta_1(X, Y, \tau) = \Theta_4(X, Y, \tau), \\ \frac{\partial \Theta_1(X, Y, \tau)}{\partial X} = \lambda_{4,1} \frac{\partial \Theta_4(X, Y, \tau)}{\partial X}, \end{array} \right. \text{при} \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{l_1}{L}, \frac{h_1}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + h_2}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \\ X = \frac{l_1}{L}, \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + H}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \\ X = \frac{l_1}{L} + 1, \frac{h_1}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + H}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(X, Y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, Y, \tau) = 0, \\ \Theta_3(X, Y, \tau) = \Theta_4(X, Y, \tau), \\ \frac{\partial \Theta_3(X, Y, \tau)}{\partial Y} = \lambda_{4,3} \frac{\partial \Theta_4(X, Y, \tau)}{\partial Y}, \end{array} \right. \text{при} Y = \frac{h_1 + H}{L}, \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1}{L} + 1, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(X, Y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, Y, \tau) = 0, \\ \Theta_2(X, Y, \tau) = \Theta_4(X, Y, \tau), \\ \frac{\partial \Theta_2(X, Y, \tau)}{\partial Y} = \lambda_{4,2} \frac{\partial \Theta_4(X, Y, \tau)}{\partial Y}, \end{array} \right. \text{при} Y = \frac{h_1}{L}, \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1}{L} + 1, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (12)$$

$$\Theta(X, Y, \tau) = 1, \text{ при} X = \frac{l_1}{L}, \frac{h_1 + h_2}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(X, Y, \tau) = \Theta_2(X, Y, \tau), \\ \frac{\partial \Theta_1(X, Y, \tau)}{\partial X} = \lambda_{2,1} \frac{\partial \Theta_2(X, Y, \tau)}{\partial X}, \end{array} \right. \text{при} \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{l_1}{L}, 0 \leq Y \leq \frac{h_1}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \\ X = \frac{l_1}{L} + 1, 0 \leq Y \leq \frac{h_1}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(X, Y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(X, Y, \tau) = 0, \\ \Theta(X, Y, \tau) = 1, \end{array} \right. \text{при} \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{h_1 + h_2}{L}, \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1 + l_{\text{ит}}}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \\ Y = \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L}, \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1 + l_{\text{ит}}}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(X, Y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial X}(X, Y, \tau) = 0, \\ \Theta(X, Y, \tau) = 1, \end{array} \right. \text{при} X = \frac{l_1 + l_{\text{ит}}}{L}, \frac{h_1 + h_2}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(X, Y, \tau) = \Theta_3(X, Y, \tau), \\ \frac{\partial \Theta_1(X, Y, \tau)}{\partial X} = \lambda_{3,1} \frac{\partial \Theta_3(X, Y, \tau)}{\partial X}, \end{array} \right. \text{ при } \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{h_1 + H}{L}, 0 \leq X \leq \frac{l_1}{L}, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}; \\ Y = \frac{h_1 + H}{L}, \frac{l_1}{L} + 1 \leq X \leq \frac{2l_1}{L} + 1, 0 \leq \tau \leq \frac{T}{t_0}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Здесь $Bi_i = \alpha L / \lambda_i$ – число Био, соответствующее i -ой подобласти; $N_i = \varepsilon \sigma L (T_{\text{ит}} - T_0)^3 / \lambda_i$ – число Старка, соответствующее i -ой подобласти; T^e – температура окружающей среды; α – коэффициент теплообмена; ε – приведенная степень черноты; σ – постоянная Стефана-Больцмана; $\lambda_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$ – относительный коэффициент теплопроводности.

Система уравнений (1) – (4) с соответствующими начальными (5) и граничными условиями (6) – (17) решена методом конечных разностей.

Уравнения (1) – (4) решались последовательно. Каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры в газовой полости и в элементах твердой стенки (уравнения 3, 4), затем решалось уравнение Пуассона для функции тока (2). Далее определялись граничные условия для вектора вихря по формуле Вудса, и решалось уравнение (1).

Для численного решения уравнений (1), (2) применялась разностная схема, которая строится по аналогии с известной схемой переменных направлений, предложенной в работах *Douglas J., Peaceman D.W., Rachford H.H.* для решения уравнения теплопроводности. Аппроксимация конвективных членов рассматривалась усредненной относительно U и $|U|$ (или V и $|V|$) для того, чтобы схема не зависела от знака скорости. Уравнения (3), (4) решались с использованием локально одномерной схемы А.А. Самарского, причем для разрешения нелинейного граничного условия III рода использовался метод простой итерации.

Метод решения был протестирован на 6 модельных задачах: движение жидкости в полости с подвижной верхней крышкой; естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области; естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области с двумя перегородками (вертикальные стенки каверны – при постоянных температурах); естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области с двумя перегородками (горизонтальные стенки каверны – при постоянных температурах); естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области с участком повышенной температуры на нижней стенке; сопряженная естественная конвекция в замкнутой прямоугольной области, одна из стенок которой имеет конечную толщину.

Рассмотренные модельные задачи показали, что использование разработанного численного алгоритма для моделирования процессов как свободноконвективного, так и сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса дает достаточно хорошее (отклонения по числам Nu составляют не более 10%) согласование с результатами как экспериментальных работ, так и теоретических. Поэтому этот численный алгоритм был применен для моделирования исследованного процесса в замкнутой прямоугольной области, представленной на рис. 1.

Численный анализ основных закономерностей конвективно-кондуктивного теплопереноса был проведен при следующих значениях безразмерных комплексов: $Sh = 1$, $Pr = 0.71$, $Gr = 10^4 - 10^7$, $Fo_1 = 1.04 \cdot 10^{-7}$, $Fo_2 = 2.17 \cdot 10^{-8}$, $Fo_3 = 9.04 \cdot 10^{-8}$, $Bi_1 = 98.57$, $Bi_3 = 69$, $N_1 = 4.66 \cdot 10^{-3}$, $N_3 = 3.27 \cdot 10^{-3}$ (индексы у безразмерных комплексов соответствуют рис. 1) и определяющих температур: $\Theta^e = -1$, $\Theta_{ит} = 1$, $\Theta_0 = 0$. Поскольку рассматривался существенно нестационарный процесс $Sh = 1$, для определения масштаба времени необходимо знать масштабы скорости и длины: $t_0 = L/V_0 = \sqrt{(LT_0)/(g\Delta T)}$, поскольку $\beta = 1/T_0$. Распределения гидродинамических и тепловых параметров (рис. 2–4) соответствуют моменту времени $\tau = 5.8 \cdot 10^4$.

Получены распределения гидродинамических характеристик и температур, характеризующие основные закономерности рассматриваемого процесса (рис. 2–4). Выделены циркуляционные течения в различных зонах области решения, обусловленные влиянием источника тепловыделения, распространением возмущений от элементов твердой стенки, а также динамикой кондуктивного теплопереноса в твердом материале. Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивного теплопереноса в элементах твердой стенки.

Показано также влияние числа Грасгофа на гидродинамические и тепловые характеристики.

С увеличением Gr от 10^4 до 10^5 происходит объединение циркуляционных зон над источником тепловыделения, при этом масштабы вторичных течений под источником уменьшаются. Ядро вектора завихренности начинает претерпевать структурные изменения, что связано как с увеличением роли подъемной силы, так и с увеличением интенсивности распространения возмущений от стенок.

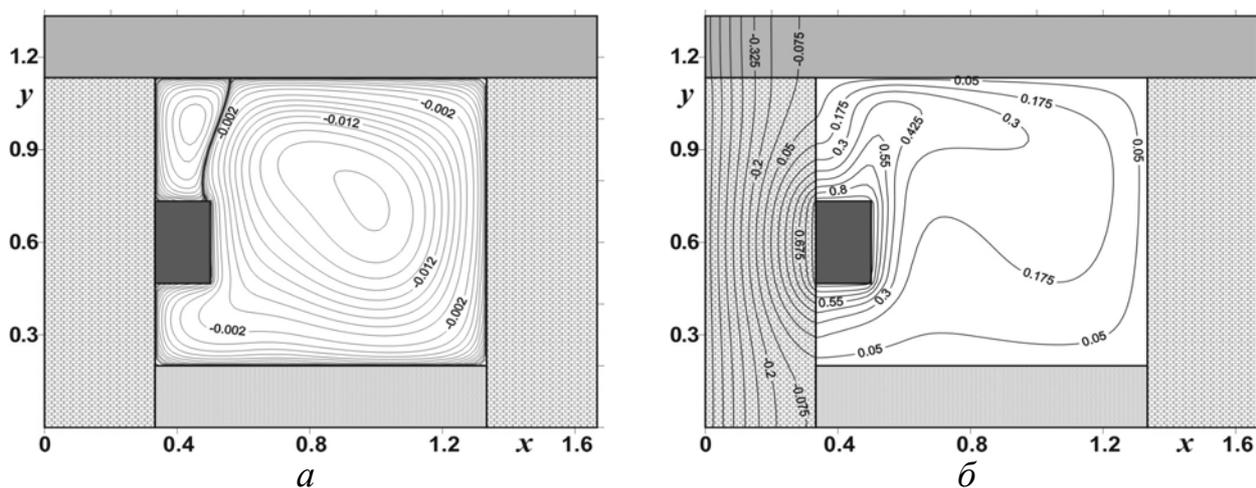


Рис. 2 – Типичные линии тока (а) и поле температуры (б) при $Gr = 10^6$

При $Gr = 10^6$ циркуляционные течения над источником тепловыделения сохраняются, а структура основного вихря, находящегося в центре газовой полости, терпит изменения. Линии тока вытягиваются вдоль диагонали прямоугольника, в котором сосредоточен газ. Распространение возмущений от элементов твердой стенки в большей мере происходит в области над источником тепловыделения и в

непосредственной близости с поверхностью самого нагревателя. Интенсификация процесса теплопереноса наблюдается в области верхнего правого угла источника тепловыделения, в зоне, где смыкаются два вихря.

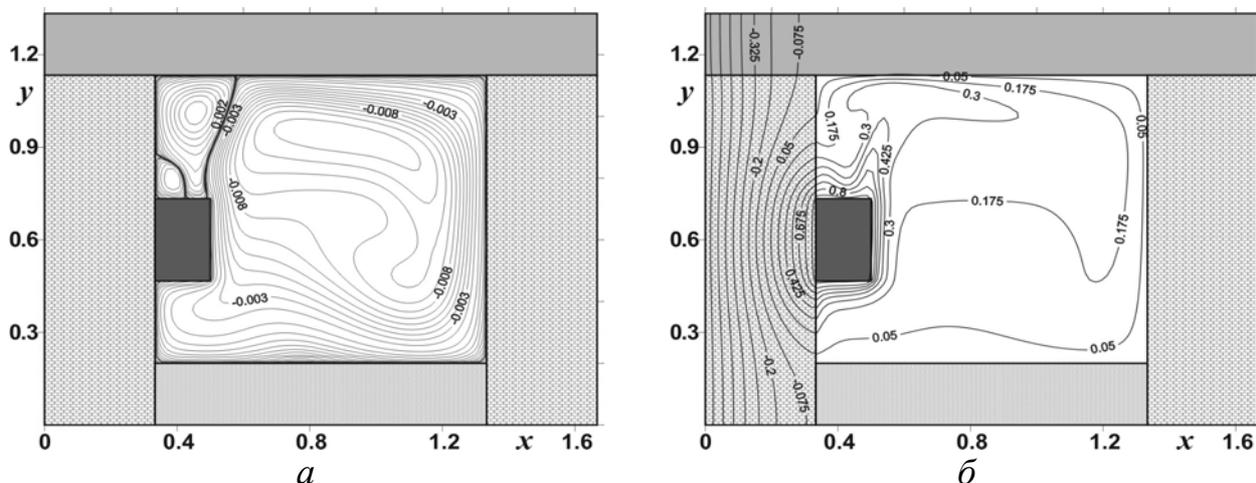


Рис. 3 – Типичные линии тока (а) и поле температуры (б) при $Gr = 10^7$

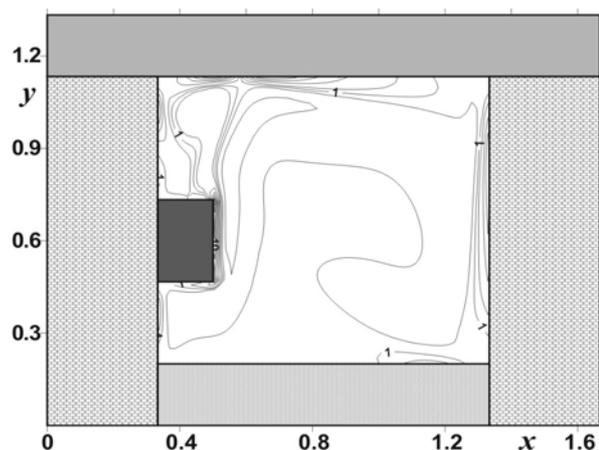


Рис. 4 – Поле вектора завихренности при $Gr = 10^7$

С ростом числа Грасгофа ядро вектора завихренности скорости продолжает претерпевать структурные изменения, и уже при $Gr = 10^7$ четкие очертания внутренней области вектора завихренности скорости размыты (рис. 4). Такая картина распределения возмущений характерна для случая интенсификации процесса, когда нельзя выделить какую-то основную зону, где сосредоточено максимальное воздействие возмущений, поскольку при изменении режима течения данная область уже не будет отвечать таким условиям. Т.е. имеет место

существенная зависимость режима свободноконвективного течения от числа Gr . Этот вывод подтверждается динамикой рассматриваемого процесса в зависимости от Gr .

Результаты численных исследований также позволяют сделать вывод о значительном влиянии интенсивности теплообмена на границах раздела газа и элементов твердой стенки на нестационарные температурные поля. При этом существенную роль играют источники тепловыделения. Они являются своеобразной преградой для тепловой волны, движущейся от окружающей среды, а также инициируют конвективное течение в газовой полости.

В третьей главе проведен анализ нестационарного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме (рис. 5) с локальными источниками тепловыделения при условии конвективно-радиационного теплообмена с окружающей средой на одной из внешних граней области решения.

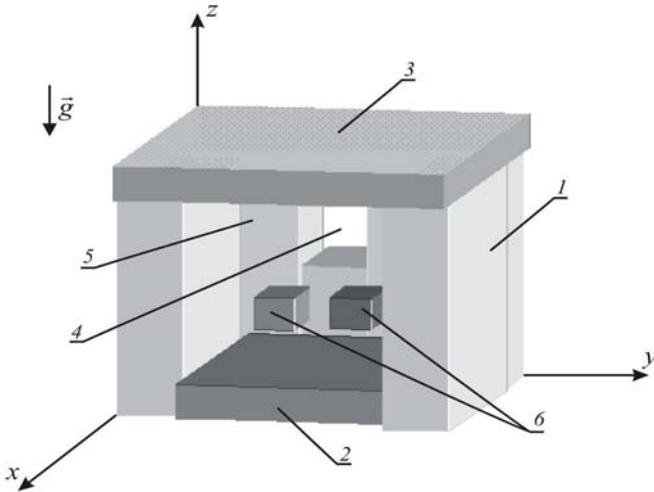


Рис. 5 – Область решения рассматриваемой задачи: 1–4 – элементы твердого материала, 5 – газ, 6 – источники тепловыделения

В пространственной постановке основные допущения, не накладывающие существенных ограничений на общность формулировки задачи, аналогичны плоской постановке. В области решения рассматривался участок с повышенной интенсивностью теплопередачи, состоящий из двух элементов твердого материала и слоя газа между ними (4 на рис. 5).

В такой постановке процесс переноса тепла в рассматриваемой области (рис. 5) описывается системой нестационарных пространственных уравнений конвекции в приближении Буссинеска для газа и нестационарным пространственным уравнением теплопроводности на основе гипотезы Фурье для элементов твердого материала с нелинейными граничными условиями.

Математическая модель сформулирована в безразмерных переменных “векторный потенциал – вектор завихренности скорости – температура”.

- для газа:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \Omega_x}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial U}{\partial X} - \\ - \Omega_y \frac{\partial U}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_x + \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \Omega_y}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_y}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_y}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial V}{\partial X} - \\ - \Omega_y \frac{\partial V}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_y - \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Ho}} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega_z}{\partial Y} + W \frac{\partial \Omega_z}{\partial Z} - \Omega_x \frac{\partial W}{\partial X} - \\ - \Omega_y \frac{\partial W}{\partial Y} - \Omega_z \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}}} \Delta \Omega_z, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\Delta \Psi_x = -2 \cdot \Omega_x, \quad (21)$$

$$\Delta\Psi_y = -2 \cdot \Omega_y, \quad (22)$$

$$\Delta\Psi_z = -2 \cdot \Omega_z, \quad (23)$$

$$\frac{1}{\text{Но}} \frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + U \frac{\partial\Theta}{\partial X} + V \frac{\partial\Theta}{\partial Y} + W \frac{\partial\Theta}{\partial Z} = \frac{1}{\text{Pr} \sqrt{\text{Gr}}} \Delta\Theta, \quad (24)$$

- для элементов твердого материала:

$$\frac{1}{\text{Fo}_i} \frac{\partial\Theta_i}{\partial\tau} = \Delta\Theta_i, \quad i = \overline{1,4}. \quad (25)$$

Здесь X, Y, Z – безразмерные декартовы координаты; U, V, W – безразмерные скорости; Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z – безразмерные компоненты векторного потенциала; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ – безразмерные компоненты вектора завихренности; $\text{Но} = V_0 t_0 / L_x$ – число гомохронности; $\text{Gr} = \beta g_z L_x^3 (T_{\text{ит}} - T_0) / \nu^2$ – число Грасгофа; L_x – длина рассматриваемой области решения по оси x .

Начальные условия для системы уравнений (18) – (25):

$$\begin{aligned} \Psi_x(X, Y, Z, 0) = 0, \quad \Psi_y(X, Y, Z, 0) = 0, \quad \Psi_z(X, Y, Z, 0) = 0, \\ \Omega_x(X, Y, Z, 0) = 0, \quad \Omega_y(X, Y, Z, 0) = 0, \quad \Omega_z(X, Y, Z, 0) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$\Theta_i(X, Y, Z, 0) = 0, \quad i = \overline{1,5}; \quad \Theta_5 \equiv \Theta$ в уравнении (24) – температура в газовой полости за исключением источников тепловыделения, на которых во все время процесса $\Theta = 1$.

Граничные условия для системы уравнений (18) – (25)

- на границе, разделяющей внешнюю среду и рассматриваемую область, записываются граничные условия, отражающие теплообмен за счет конвекции и излучения рассматриваемого объема с внешней средой

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_i(X, Y, Z, \tau)}{\partial X} = \text{Bi}_i \cdot \Theta_i(X, Y, Z, \tau) + \text{Bi}_i \cdot \frac{T_0 - T^e}{T_{\text{ит}} - T_0} + Q_i, \\ \text{где } Q_i = N_i \cdot \left[\left(\Theta_i(X, Y, Z, \tau) + \frac{T_0}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 - \left(\frac{T^e}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 \right], \quad X = 0; \end{aligned} \quad (27)$$

где $i = 1, 3, 4$ в соответствии с рис. 5;

- на всех внешних границах рассматриваемой области кроме границы, на которой осуществляется теплообмен с внешней средой, заданы условия теплоизоляции

$$\frac{\partial\Theta_i(X, Y, Z, \tau)}{\partial X^k} = 0, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} i = \overline{1,3}, \\ k = \overline{1,3}; \end{aligned} \quad (28)$$

- на всех участках области решение, где происходит сопряжение материалов с различными теплофизическими параметрами, заданы условия 4-го рода

$$\begin{cases} \Theta_i = \Theta_j & i = \overline{1,5}, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial X^k} = \lambda_{j,i} \frac{\partial \Theta_j}{\partial X^k}, \text{ где } j = \overline{1,5}, \\ & k = \overline{1,3}; \end{cases} \quad (29)$$

- на внутренних границах газа и твердого материала, параллельных плоскости XZ:

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi_y}{\partial Y} = \Psi_z = 0, \quad \begin{cases} \Theta_1 = \Theta_5, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} = \lambda_{5,1} \frac{\partial \Theta_5}{\partial Y}; \end{cases} \quad (30)$$

- на внутренних границах газа и твердого материала, параллельных плоскости YZ:

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial X} = \Psi_y = \Psi_z = 0, \quad \begin{cases} \Theta_i = \Theta_5, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial X} = \lambda_{5,i} \frac{\partial \Theta_5}{\partial X}, \quad i = 1, 4; \end{cases} \quad (31)$$

- на внутренних границах газа и твердого материала, параллельных плоскости XY:

$$\Psi_x = \Psi_y = \frac{\partial \Psi_z}{\partial Z} = 0, \quad \begin{cases} \Theta_i = \Theta_5, \\ \frac{\partial \Theta_i}{\partial Z} = \lambda_{5,i} \frac{\partial \Theta_5}{\partial Z}, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (32)$$

Задача (18) – (25) с соответствующими начальными (26) и граничными (27) – (32) условиями решена методом конечных разностей.

Методика и алгоритм решения краевой задачи (18) – (32) аналогичны решению задачи (1) – (17).

Разработанный метод решения был протестирован на двух модельных задачах. Рассматривалась естественная конвекция в замкнутом кубе, одна грань которого имеет максимальную температуру, а противоположная грань – минимальную температуру. Остальные грани или адиабатические, или температура на них изменяется по линейному закону.

В результате решения модельных задач было получено достаточно хорошее (отклонения по числам Нуссельта составляют не более 5%) согласование с результатами как экспериментальных, так и теоретических работ. Разработанный численный алгоритм был применен для моделирования процесса нестационарного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме (рис. 5).

Численные исследования проведены при следующих значениях безразмерных комплексов: $Но = 1$, $Gr = 10^5 - 10^6$, $Pr = 0.71$ и определяющих температур: $T^c = 253$ К, $T_{ит} = 333$ К, $T_0 = 293$ К. Распределения гидродинамических и тепловых параметров (рис. 6–9) соответствуют моменту времени $t = 24$ ч.

Получены поля течения и температур, характеризующие основные закономерности рассматриваемого процесса (рис. 6–8). Выделены вихревые движения в различных зонах области решения, обусловленные влиянием как источников тепловыделения, так и динамикой кондуктивного теплопереноса в ограждающих конструкциях.

Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивной теплопередачи в элементах твердого материала. Влияние теплопроводности на естественную конвекцию хорошо отражено в подобласти с повышенной интенсивностью теплопередачи, состоящей из двух элементов твердого материала и слоя газа между ними (область 4 на рис. 5). Выделены циркуляционные течения в этой зоне, влияющие на основное вихревое движение в газовой полости.

Проведен также анализ влияния числа Грасгофа на поле скорости и на распределение температуры.

Увеличение числа Грасгофа от 10^5 до 10^6 приводит как к качественному, так и количественному изменению циркуляционных течений, что отражено в несоответствии интегральных характеристик (например, $\Psi_{x\max}$, $\Psi_{y\max}$, $\Psi_{z\max}$). Распределения изотерм при этом заметно отличаются. Происходит существенное изменение ориентации линий постоянной температуры параллельно оси z . Основной причиной, приводящей к таким изменениям, является не только увеличение роли подъемной силы. Учет переноса массы, количества движения и энергии по третьей координате приводит к соответствующим изменениям полей характерных величин в отличие от плоского случая.

Проведено сравнение результатов моделирования теплопереноса и гидродинамики исследуемого процесса в плоской и пространственной постановках.

Размеры зоны вторичного течения в плоском случае заметно превышают аналогичные в пространственном случае. Такой эффект объясняется тем, что в двумерной постановке движение газовых масс осуществляется только в плоскости без возможных перетоков и теплоотвода во внешние области в третьем направлении. В случае решения пространственной задачи, на распределения как температуры, так и скорости оказывают влияние не только элементы данного сечения, но и вся область в целом.

Характер отличий в распределении температуры аналогичен отличиям в линиях тока. Например, изотермы, соответствующие 295 К и 300 К, охватывают большую площадь, чем в случае пространственной постановки.

Теплоотвод на внешних границах области конвективного теплопереноса приводит не только к снижению абсолютных значений температуры, но и к некоторой стабилизации самого течения и соответственно процесса теплопереноса.

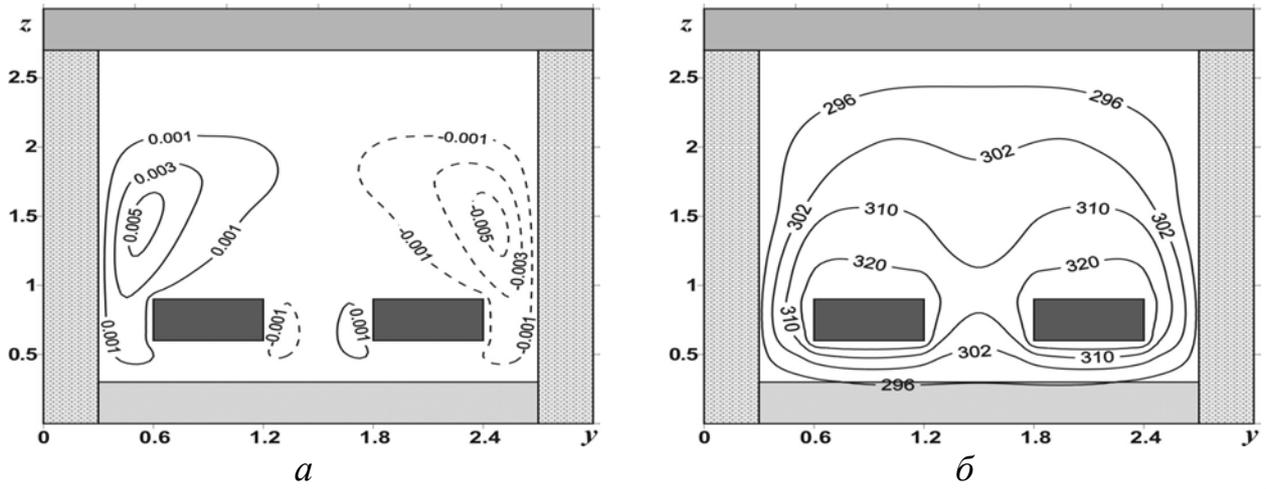


Рис. 6 – Типичные линии тока (*a*) и поле температуры (*б*) в сечении $x = 0.78$ м при $Gr = 10^6$, T, K ; $y, z, м$

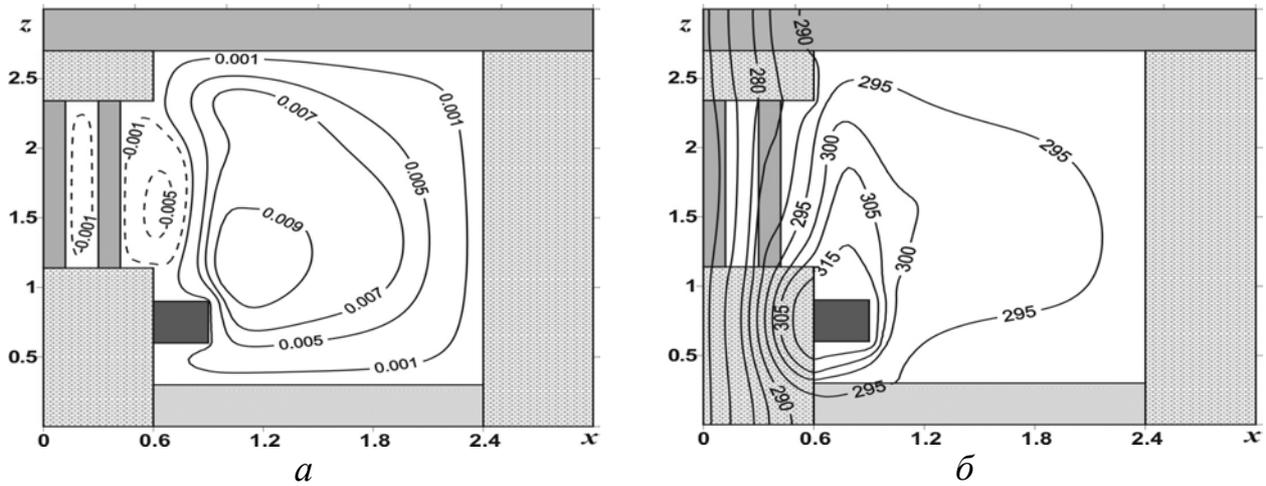


Рис. 7 – Типичные линии тока (*a*) и поле температуры (*б*) в сечении $y = 1.08$ м при $Gr = 10^6$, T, K ; $x, z, м$

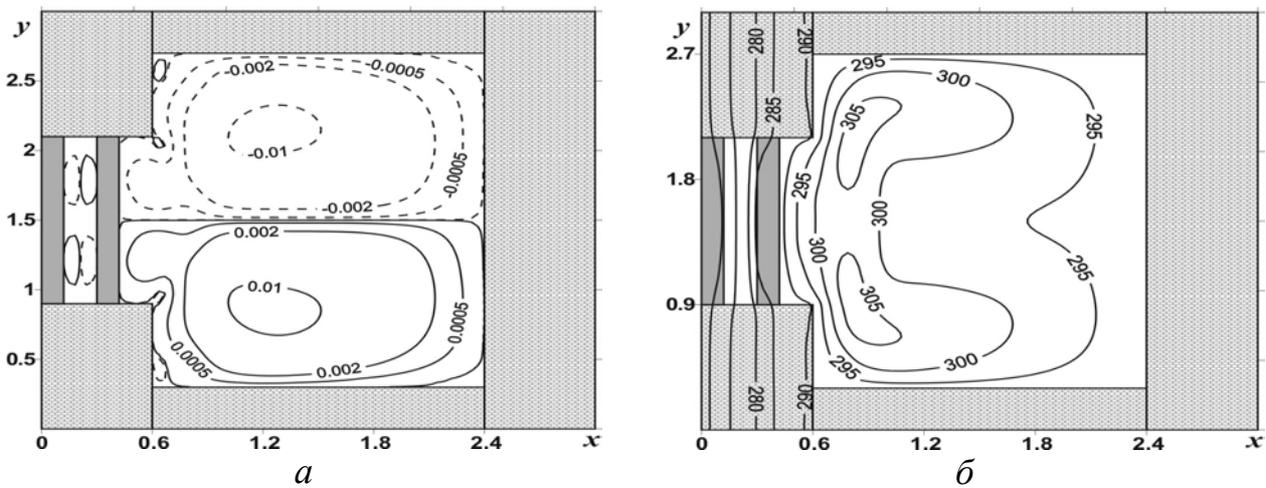


Рис. 8 – Типичные линии тока (*a*) и поле температуры (*б*) в сечении $z = 1.74$ м при $Gr = 10^6$, T, K ; $x, y, м$

Исследование влияния числа Gr на профиль температуры по длине области решения (рис. 9) в трех характерных сечениях для плоской и пространственной моделей установило зоны существенной температурной неоднородности, а также масштабы отклонения локальных значений температуры для этих моделей.

Установлено, что при определенном уровне интенсивности процессов подвода энергии от источника и отвода через внешние границы вместо роста количества вихревых структур за счет их распада при увеличении Gr и соответствующего изменения температурных распределений, осуществляется стабилизация течения и теплообмена за счет влияния энергоемкой конденсированной фазы.

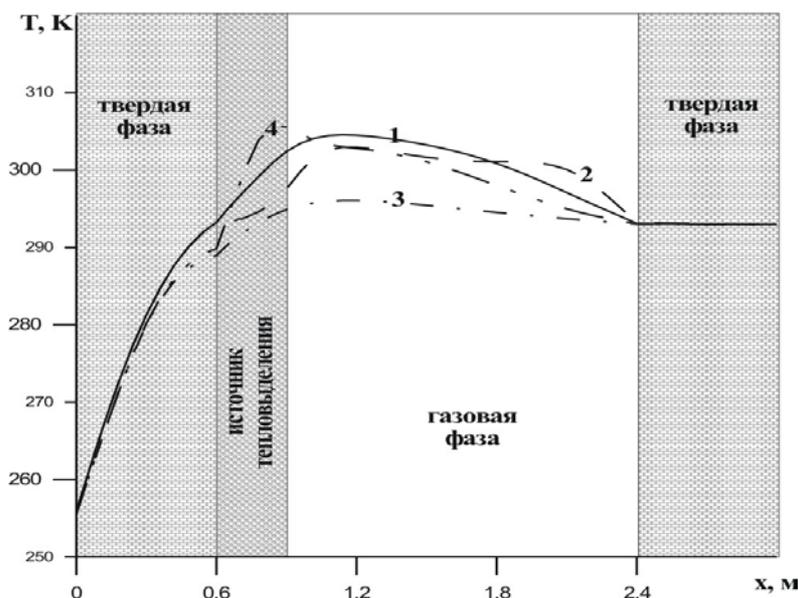


Рис. 9 – Распределение температуры в сечении, проходящем над источником тепловыделения при $z = 1.8$ м (двумерная модель: 1 – $Gr = 10^5$, 2 – $Gr = 10^6$; трехмерная модель: 3 – $Gr = 10^5$, 4 – $Gr = 10^6$)

Полученные результаты также позволяют сделать вывод о том, что интенсивность теплообмена на внешних границах области термогравитационной конвекции определяет не только абсолютные значения температур, но и характер самого конвективного течения. Регулируя условия теплоотвода на внешних границах области свободноконвективного течения, можно достаточно эффективно управлять течением жидкости, а соответственно и полем температур в этой области. Такой механизм управления тепловым режимом может быть целесообразен при реализации тонких химических технологий, технологий получения элементной базы радиоэлектроники, при получении новых материалов, в биотехнологиях. Выделенный механизм управления тепловым режимом может быть очень эффективным в тех приложениях, где требуются, исходя из регламента основного технологического процесса, определенные уровни градиентов температур или скоростей нагрева или охлаждения объектов.

В заключении подведены основные итоги проведенных исследований.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Впервые получено решение задачи нестационарного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутой области с локальными источниками тепловыделения при условии конвективно-радиационного теплообмена с окружающей средой на одной из внешних границ и неоднородными граничными условиями.
2. Выделены закономерности сопряженного теплопереноса в широком диапазоне изменения числа Грасгофа $10^4 \leq Gr \leq 10^7$ (двумерная модель) и $10^5 \leq Gr \leq 10^6$ (пространственная модель).
3. **плоская модель:**
 - 3.1. Получены распределения гидродинамических параметров и температур, характеризующие основные закономерности рассматриваемого процесса.
 - 3.2. Выделены циркуляционные течения в различных зонах области решения, обусловленные влиянием источника тепловыделения, распространением возмущений от элементов твердой стенки, а также динамикой кондуктивного теплопереноса в твердом материале.
 - 3.3. Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивного теплообмена в элементах твердой стенки.
 - 3.4. Показаны масштабы влияния числа Грасгофа на гидродинамические и тепловые характеристики.
 - 3.5. Показано значительное влияние интенсивности теплообмена на границах раздела газовой и твердой фаз на нестационарные температурные поля.
4. **пространственная модель:**
 - 4.1. Получены распределения гидродинамических параметров и температур для характерных сечений области решения.
 - 4.2. Выделены вихревые движения в различных зонах анализируемой области, обусловленные влиянием как источников тепловыделения, так и динамикой кондуктивного теплопереноса в ограждающих конструкциях.
 - 4.3. Установлены масштабы взаимного влияния конвективного теплопереноса в газовой полости и кондуктивной теплопередачи в элементах твердого материала.
 - 4.4. Выделены циркуляционные течения в зоне с повышенной интенсивностью теплопередачи, влияющие на основное вихревое движение в газовой полости.
 - 4.5. Показаны масштабы влияния числа Грасгофа на поле скорости и распределение температуры.
 - 4.6. Проведено сравнение результатов моделирования теплопереноса и гидродинамики исследуемого процесса в плоской и пространственной постановках. Выделены зоны существенной температурной неоднородности, а также масштабы отклонения локальных значений температуры для этих моделей.
5. Установлено, что при определенном уровне интенсивности процессов подвода энергии от источника и отвода через внешние границы вместо роста

количества вихревых структур за счет их распада при увеличении Gr и соответствующего изменения температурных распределений, осуществляется стабилизация течения и теплообмена за счет влияния энергоемкой конденсированной фазы.

6. Установлено, что интенсивность теплообмена на внешних границах области термогравитационной конвекции определяет не только абсолютные значения температур, но и характер самого конвективного течения. Контролируя условия теплоотвода на внешних границах области решения, можно достаточно эффективно управлять течением жидкости, а соответственно и полем температур в газовой полости.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Численное моделирование пространственного теплопереноса в составных параллелепипедах с локально сосредоточенными участками тепловыделения // Краевые задачи и математическое моделирование: Сборник трудов 6-й Всероссийской научной конференции 29 ноября – 1 декабря 2003 г. Краевые задачи и методы их решения / НФИ КемГУ; Под общ. ред. В.О. Каледина. – Новокузнецк, 2003. – Т. 1. – С. 108-112.
2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование процесса теплопереноса на примере типичного объекта теплоснабжения // Материалы девятой Всероссийской научно-технической конференции «Энергетика: экология, надежность, безопасность». – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – Т. 2. – С. 19-23.
3. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование пространственного теплопереноса в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306, № 6. – С. 69-72.
4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование нестационарного теплопереноса через ограждающие конструкции зданий с учетом неоднородного характера теплообмена внутри здания // Ползуновский вестник. – 2004. – №1. – С. 215-218.
5. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Пространственное моделирование теплопереноса через ограждающие конструкции в условиях неоднородного теплообмена на границах // V Минский международный форум по тепло- и массообмену: Тезисы докладов и сообщений. – Минск: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова, 2004. – Т. 1. – С. 249-250.
6. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Пространственный теплообмен в замкнутом прямоугольном объеме с локальными источниками тепловыделения // Сопряженные задачи механики, информатики и экологии: Материалы международной конференции. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. С. 142-143.
7. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Численное моделирование пространственного нестационарного теплопереноса в замкнутом объеме с учетом работы локально сосредоточенных источников тепловыделения // XXVII Сибирский теплофизический семинар, посвященный 90-летию академика С.С.

- Кутателадзе: Тезисы докладов. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2004. С. 217-219.
8. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование конвективного теплопереноса в замкнутой области // *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции.* – Томск: Изд-во ТГУ, 2004. С. 407-408.
 9. Шеремет М.А. Моделирование конвективно-кондуктивного теплопереноса в области с локально сосредоточенным источником тепловыделения // *Зимняя школа по механике сплошных сред (четырнадцатая): Тезисы докладов.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 304.
 10. Шеремет М.А. Естественнo-конвективный теплообмен в сопряженной постановке // *Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: Доклады молодежной конференции. Вып. X* – Новосибирск: Нонпарель, 2005. С. 202-205.
 11. Вавилов В.П., Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование термогравитационной конвекции в сопряженной постановке в замкнутой области // *Известия Томского политехнического университета.* – 2005. – Т. 308, № 5. – С. 104-109.
 12. Шеремет М.А. Численное моделирование теплообмена в прямоугольной области // *Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках: Труды XV Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. В 2-х т. Т. 2.* – М.: Издательство МЭИ, 2005. С. 470-473.
 13. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование нестационарного теплопереноса в замкнутой области с локальным источником тепловыделения // *Теплофизика и аэромеханика.* – 2005. – Т. 12, №2. – С. 305-314.
 14. Шеремет М.А. Задача ламинарной свободной конвекции в сопряженной постановке // *14-ая Всероссийская школа-конференция молодых ученых: Тезисы докладов.* – Пермь: Пермский государственный технический университет, 2005. С. 79-80.
 15. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование пространственного сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме // *XXVIII Сибирский теплофизический семинар, посвященный 70-летию академика В.Е. Накорякова: Тезисы докладов.* – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2005. С. 129-130.
 16. Вавилов В.П., Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Моделирование нестационарного теплопереноса в системе теплоэнергопотребления с локально сосредоточенным источником тепловыделения в сопряженной постановке // *Промышленная теплотехника.* – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 43-55.
 17. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Гидродинамика процесса сопряженного конвективно-кондуктивного теплопереноса в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения. Томский государственный университет. – Томск, 2005. – 18 с. – Деп. в ВИНТИ 03.10.05 № 1268 – В 2005.

18. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Сопряженный конвективно-кондуктивный теплоперенос в замкнутом объеме с локально сосредоточенными источниками тепловыделения. Томский государственный университет. – Томск, 2005. – 19 с. – Деп. в ВИНТИ 03.10.05 № 1269 – В 2005.
19. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Математическое моделирование теплопереноса в объектах теплоснабжения и анализ тепловых потерь // “Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы)”: Труды Второй Международной научно-практической конференции. – М.: Издательство МЭИ, 2005. С. 163-166.
20. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Сопряженный теплоперенос в замкнутой области с локально сосредоточенным источником тепловыделения // ИФЖ. – 2006. – Т. 79, № 1. – С. 56-63.
21. Шеремет М.А. Нестационарный конвективно-кондуктивный теплоперенос в замкнутом объеме // Сборник научных трудов научной конференции молодых учёных по механике сплошных сред «Поздеевские чтения» – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. С. 139-141.