На правах рукописи

Кобылина Мария Сергеевна

ЛОКАЛЬНО РАВНОМЕРНО ВЫПУКЛЫЕ НОРМЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.01– математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук.

Томск – 2007

Работа выполнена на кафедре теории функций
ГОУВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Гулько Сергей Порфирьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Пыткеев Евгений Георгиевич
Институт математики ИММ УрО РАН

кандидат физико-математических наук, доцент
Лазарева Елена Геннадьевна
ГОУВПО «Томский государственный университет», кафедра общей математики

Ведущая организация: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится « 12 » ноября 2007г. в 10 часов 30 минут на заседании диссертационного совета К 212.267.05 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 34 а.

Автореферат разослан 12 октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент А. Н. Малютина

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Теория перенормировок является ветвью функционального анализа, которая исследует проблемы существование эквивалентных норм на банаховых пространствах с более хорошими геометрическими свойствами выпуклости и гладкости. Данная диссертация посвящена исследованию некоторых свойств первого типа, т.е. свойств выпуклости.

Нормы, обладающие достаточно хорошими свойствами выпуклости, были впервые описаны Кларксоном [2] в 1936 году. В частности, им было введено понятие равномерно выпуклой нормы на банаховом пространстве: последовательности длин различных хорд единичной сферы стремятся к нулю при условии, что их средние точки приближаются к границе этой сферы. Более слабый тип выпуклости, называемый локальной равномерной выпуклостью, который геометрически отличается от равномерной выпуклости тем, что одна из концевых точек рассматриваемых выше хорд единичной сферы фиксирована, был рассмотрен Ловаглиа [7]. Современная теория перенормировок банаховых пространств имеет дело также со строго выпуклыми перенормировками, перенормировками Кадеца и слабо локально равномерно выпуклыми перенормировками.

Отметим, что стандартная sup-норма на пространстве непрерывных функций $C(K)$, исследованию которых посвящена наша работа, не обладает ни одним из перечисленных выше свойств выпуклости. Поэтому естественно желание заменить эту норму на возможно более «хорошую» эквивалентную норму. Известно, что на любом сепарабельном банаховом пространстве существуют эквивалентная локально равномерно выпуклая норма (теорема Кадеца). Следовательно, для метризуемого компакта X такая норма существует на пространстве всех непрерывных функций $C(X)$.

Что касается неметризуемых компактов, на которых пространство непрерывных функций допускает локально равномерно выпуклую перенормировку, то к таковым относятся компакты Корсона. Среди других классов компактов X, для которых пространство $C(X)$ допускает такие нормы, в литературе большое внимание уделено классу разреженных компактов [3].

Однако, следует отметить, что существуют пространства непрерывных функций, не допускающие никаких эквивалентных перенормировок, обладающих рассматриваемыми свойствами выпуклости. В 1972 Линденштраусом было доказано, что банахово пространство $l_\infty = C(\beta N)$ не допускает никакой эквивалентной локально равномерно выпуклой перенормировки [6]. Кроме того, банаховы пространства l_∞ / c_0 и $l_\infty(\Gamma)$, где Γ — несчетное множество, содержат копии l_∞ и также не имеют эквивалентных LUR норм. В связи с этим, возникает закономерный вопрос: только ли наличие пространств типа l_∞ препятствует существованию интересующих нас перенормировок банаховых пространств, в частности, например, свойства LUR? В статье [4] Хэйдон построил пример замкнутой подрешетки X в пространстве l_∞, которая не содержит подпространств изоморфных l_∞ и которое, тем не менее, не допускает ни LUR, ни более слабой $WLUR$ перенормировки. Также отметим, что в [3] рассмотрен пример пространства непрерывных функций, допускающего норму Кадеца, но не допускающий никакой строго выпуклой перенормировки.

Таким образом, вопрос существования эквивалентных норм на банаховых пространствах непрерывных функций на компактах с «хорошими свойствами» выпуклости остается актуальным, и ему и посвящена данная диссертация.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование пространств непрерывных функций на неметризуемых компактах, которые допускают локально равномерно выпуклые и другие аналогичные перенормировки. В частности, актуальным остается вопрос о широте этих классов и способах построения таких норм.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Рассмотрены классы неметризуемых компактов, пространство непрерывных функций на которых допускает локально равномерно выпуклую перенормировку. Доказано, что к этим классам относятся класс всех линейно упорядоченных сепарабельных компактов, а также некоторые компакты Федорчука и др.
2. Определен новый класс компактов X, построенных на основе понятия псевдодерева (которое расширяет обычное понятие дерева) и таких, что $C(X)$ допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертационной работы носят теоретический характер и имеют научный интерес для специалистов в области топологии и функционального анализа. Они могут быть использованы в научных исследованиях, посвященных проблемам перенормировок, а также в университетских спецкурсах для студентов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (12-14 апреля 2005 года, Новосибирский государственный университет), на Международной конференции «Александровские чтения» (30 мая - 2 июня 2006 года, Московский государственный университет), на научной конференции молодых ученых,

аспирантов и студентов ММФ, посвященной трехсотлетию со дня рождения Л. Эйлера. (16-21 апреля 2007 года, Томский государственный университет, механико-математический факультет), а также на семинарах по топологии и функциональному анализу в Томском государственном университете. Основные результаты диссертации доказаны с использованием методов линейной, а также нелинейной техники перенормировок банаховых пространств. Достоверность утверждений обосновывается полными математическими доказательствами, а также сравнением полученных результатов с результатами других авторов.

Структура и объем работы. Представляемая диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 61 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Основные понятия различных типов выпуклости норм на банаховых пространствах определены во введении диссертации. Перечислим их.

Определение. Нормированное линейное пространство X называется ***равномерно выпуклым,*** если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, для которого из условий $\|x - y\| \geq \varepsilon$ и $\|x\| = \|y\| = 1$, $x, y \in X$, следует, что $\frac{\|x + y\|}{2} \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.

Определение. Нормированное линейное пространство X называется ***локально равномерно выпуклым*** (или кратко LUR), если для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированного элемента $x \in X$, $\|x\| = 1$ существует $\delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что условия $\|x - y\| \geq \varepsilon$ и $\|y\| = 1$, $y \in X$, влекут $\frac{\|x + y\|}{2} \leq 1 - \delta(\varepsilon, x)$.

Определение. Нормированное линейное пространство X называется ***строго выпуклым***, если условие $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ влечет линейную зависимость ненулевых элементов x и y из X.

Определение. Норма на банаховом пространстве X называется ***слабо локально равномерно выпуклой*** (или кратко $WLUR$), если любая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ слабо сходится к x_0 при условии $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{x_n + x_0}{2}\right\| = \|x_0\|$.

В первой главе диссертации рассмотрены такие компактные пространства, как лексикографический квадрат, линейно упорядоченный сепарабельный компакт, а также компакты, которые строятся на основе понятия псевдодерева. Дадим формулировки этих утверждений.

Теорема 1.1. *Пусть $X = [0,1]\times[0,1]$ – компактное пространство с топологией лексикографического порядка. Тогда на пространстве $C(X)$ существует эквивалентная* sup *– норме локально равномерно выпуклая норма.*

Теорема 1.5. *Пусть X - линейно упорядоченный сепарабельный компакт со стандартной интервальной топологией. Тогда пространство $C(X)$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in X}|f(x)|$ допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.*

Доказательства этих двух теорем основаны на одной теореме Зизлера [9]. Можно сказать, что оно является адаптацией к новой ситуации методов Джейна, Намиоки и Роджерса [5], которые доказали существование эквивалентной локально равномерно выпуклой нормы для компакта «две стрелки».

Попытка обобщения теоремы 1.5 привела к понятию псевдодерева.

Определение. Назовем частично упорядоченное множество $(T,<)$ ***псевдодеревом***, если для каждого элемента t из T множество $F_t = \{s\in T; s\le t\}$ является линейно упорядоченным. Будем говорить, что псевдодерево ***густо ветвится***, если множество $G_t = \{s\in T; s>t\}$ не является линейно упорядоченным для каждого элемента t из T.

Назовем элемент $t\in T$ ***точкой ветвления***, если существуют элементы u и v, большие t, такие что $(F_u \setminus F_t)\cap(F_v\setminus F_t) = \varnothing$. Множество всех точек ветвления T обозначим B_T. Скажем, что элемент $t\in T$ имеет n ветвей, если существует набор из n элементов $\{u_1,\ldots,u_n\}\subset G_t$, для которого интервалы (t,u_i) попарно не пересекаются. Обозначим через $n(t)$ количество ветвей элемента $t\in B_T$ таких, что для любой более широкой последовательности элементов $\{u_1,\ldots,u_{n(t)+1}\}\subset G_t$ система множеств (t,u_i) не является дизъюнктной.

Введем на T топологию порядка, посредством базы, которую для точек ветвления t псевдодерева T будут составлять множества вида $(s,t] = \{u\in T;\ s<u\le t\}$, а для точек $t\in T\setminus B_t$ – всевозможные интервалы $(u,v) = \{s\in T;\ u<s<v\}$, содержащие точку t, в общем случае не сводящиеся к полуинтервалам.

Так как множества G_t в топологии порядка являются открыто – замкнутыми в T, то для каждого $t\in B_T$ множество G_t представим в виде дизъюнктного объединения $n(t)$ открыто – замкнутых ветвей $G_{t,i}$ элемента t, $i=0,\ldots n(t)-1$. Множество $G_{t,i}$ содержит интервал (t,u_i) из соответствующей системы попарно не пересекающихся множеств, а также множества G_s для каждого $s \in (t, u_i)$.

Назовем линейно упорядоченное множество $A_{t,i} \subset G_{t,i}$ ***побегом элемента*** $t \in T$, если оно максимально по включению. Побег, также как и пространство $G_{t,i}$, является открыто – замкнутым множеством. Кроме того, для точек побега $A_{t,i}$ справедливо одно из утверждений:

(а) в любой выколотой окрестности $O_s \setminus \{s\}$ элемента $s \in A_{t,i}$ содержатся точки ветвления, либо

(б) существует выколотая окрестность $O_s \setminus \{s\}$ точки $s \in A_{t,i}$, не содержащая точек ветвления.

Для минимального элемента $0_T \in T$ фиксируем нулевой побег $A_{0_T,0}$, другие его ветви и соответствующие побеги, если они есть, нумеруются произвольным образом. Далее ветви и побеги точек ветвления будем выбираются и нумеруются таким образом, чтобы нулевым побегом точки ветвления $s \in A_{t,i}$ было продолжение $A_{t,i}$, т.е. $A_{s,0} = A_{t,i} \cap G_s$. Таким образом псевдодерево T можно представить в виде дизъюнктного объединение $T = A_{0_T,0} \cup \bigsqcup_{t \in B_T} \left(\bigsqcup_{i=1}^{n(t)} A_{t,i} \right)$, за исключением нулевых, побегов элементов ветвления псевдодерева T.

В отличие от деревьев, псевдодеревья не всегда являются локально компактными пространствами. В связи с этим установлены следующие факты.

Факт 1. Псевдодерево T не является локально компактным, если оно содержит точки, удовлетворяющие условию (а).

Факт 2. Если псевдодерево T не имеет точек, удовлетворяющих условию (а), то оно локально компактно.

Для псевдодеревьев, не являющихся локально компактными, рассмотрено компактное расширение $K_T = B_T \times \{0\} \cup T \times \{1\}$, подобное «двум стрелкам», со следующей топологией:

1. для точки $x = (t, 0)$ пространства K_T:
   a) если любой интервал (t, u) побега $A_{t,0}$ содержит точки ветвления псевдодерева T, то окрестностями точки $x = (t, 0)$ объявляются множества вида $[t, u) \cap B_T \times \{0\} \cup (t, u) \times \{1\}$;
   b) иначе x считается изолированной точкой;
2. для точки $y = (t, 1)$ пространства K_T:
   a) если $t \notin B_T$, то окрестностями точки $y = (t, 1)$ объявляются множества вида $(u, v) \cap B_t \times \{0\} \cup (u, v) \times \{1\}$, где t принадлежит интервалу (u, v);
   b) иначе окрестностями точки объявляются множества вида $(u, t) \cap B_t \times \{0\} \cup (u, t] \times \{1\}$, где (t, u) – произвольный интервал побега $A_{t,0}$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.14. *Пусть T – псевдодерево, каждая точка ветвления которого имеет лишь конечное число ветвей. Пусть для каждого $t \in T$ множество F_t является линейно упорядоченным компактом, и $C(F_t)$ допускает LUR норму. Тогда пространство непрерывных функций $C_0(K_T)$ допускает локально равномерно выпуклую норму.*

Напомним, что для локально компактного пространства K пространство $C_0(K)$ состоит из всех непрерывных функций f на K, для которых множество $\left\{x \in K / \left|f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$ компактно для каждого $\varepsilon > 0$, и наделенного обычной $\sup$-нормой.

В главе 2 применяются новые методы построения локально равномерно выпуклых норм, которые недавно разработали А.Мольто, Д.Оригуелла, С.Троянский и М.Вальдивиа [8]. Это позволило обобщить некоторые результаты первой главы данной диссертации, а именно доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. *Пусть K – линейно упорядоченный сепарабельный компакт. Тогда пространство непрерывных функций $C(K)$ на компакте K допускает эквивалентную полунепрерывную снизу относительно топологии поточечной сходимости LUR – норму.*

Кроме того, в главе 2 этот метод построения LUR—норм применен к компактам, построенным с помощью следующей конструкции Федорчука.

Пусть X — компакт, и каждой точке $x \in X$ поставлен в соответствие компакт Y_x. Пусть, далее, для каждой точки x из X задано непрерывное отображение $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$. Определим на дизъюнктном объединении $\bigcup_d \{Y_x; x \in X\}$ топологию, базу которой составляют множества вида: $O(x,U,V) = V \cup \pi^{-1}\left(U \cap h_x^{-1}V\right)$, где V - открытое подмножество в Y_x, U - окрестность точки x в X, а $\pi : \bigcup Y_x \to X$ — естественная проекция, действующая по формуле $\pi(y) = x$, если $y \in Y_x$. Полученное пространство принято обозначать $B(X, Y_x, h_x)$.

С помощью специальным образом построенного вложения компакта Федорчука $B(X, Y_x, h_x)$ в тихоновское произведение компактов и нелинейной техники перенормировки А.Мольто, Д.Оригуеллы, С.Троянского и М.Вальдивиа банаховых пространств доказана следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть $B(X, Y_x, h_x)$ - компакт Федорчука, где пространство X является метрическим компактом и для каждого $x \in X$ компактное пространство Y_x гомеоморфным образом можно вложить в отрезок $[0,1]$ вещественной прямой. Тогда $C(B(X,Y,h_x))$ допускает локально равномерно выпуклую норму, которая является полунепрерывной снизу в топологии поточечной сходимости.*

Из последних двух теорем и результатов статьи [8] вытекает

Следствие 2.9. *Пусть K – линейно упорядоченный сепарабельный компакт или компакт Федорчука из теоремы 2.8. Тогда K имеет свойство Намиоки.*

Напомним, что компактное пространство X имеет свойство Намиоки, если для любого пространства B со свойством Бэра и любой раздельно непрерывной функции $f : B \times X \to R$ существует всюду плотное G_δ подмножество $A \subset B$ такое, что f совместно непрерывно в каждой точке множества $A \times X$

Теорема 2.8. получена совместно с С.П.Гулько и является обобщением его результата [1], в котором для компактов Федорука было установлено свойство Намиоки.

Литература.

1. **Гулько С.П.** *Компакты Федорчука и свойство Намиоки* // Вестник Московского государственного университета. – 1994. – № 6.
2. **Clarcson J.A.** *Uniformly convex spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1936. – Vol. 40. – P. 396-414.
3. **Haydon R.G**. *Trees in renorming* // Proc. London Math. Soc. – 1999. – Vol. 78. – P. 541-584.

4. **Haydon R.G., Zizler V.** *A new spaces with no locally uniformly rotund renorming* // Can. Math. Bull. - 1989. – Vol. 32 (1). – P.122-128.
5. **Jayne J.E., Namioka I., Rogers C.A.** σ*-fragmentable banach spaces* // Mathematika –1992. – Vol. 39. – P. 166-188.
6. **Lindenstrauss J.** *Weakly compact sets – their topological properties and the banach spaces they generate* // Annals of math. Studies –1972. – Vol. 69. – P. 235-273.
7. **Lovaglia** A.R. *Locally uniformly convex Banach spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. –1955. – Vol. 78, No 1 - Jan. – P. 255-238.
8. **Molto A., Orihuela J., Troyanski S., Valdivia M.** *A non linear transfer technique for renorming* // Pre-Publicationes del Departamento de Matematicas, Universidad de Murcia 20. – 2003.
9. **Zizler V.** *Non-separable banach spaces* In book “Handbook of the Geometry of Banach spaces” // Elsevier, Amsterdam. –2003. – Vol. 2 – P. 1743-1816.

Список работ Автора по теме диссертации.

1. Кобылина М.С. *Локально равномерно выпуклая норма на пространстве вида* $C(K)$*, где* K *- лексикографический квадрат* // Вестник Томского государственного университета. – 2004 – № 284. – С. 24-26.
2. Кобылина М.С. *Локально равномерно выпуклая норма на пространстве вида* $C(K)$*, где* K *- линейно упорядоченный сепарабельный компакт* // Вестник Томского государственного университета. – 2006. - № 290. – С. 64-65.
3. Кобылина М.С. *LUR нормы на пространствах непрерывных функций на псевдодеревья*х // Вестник Томского государственного университета – 2007. - №297. – С. 146-150.
4. Кобылина М.С. *Существование локально равномерно выпуклой полунепрерывной снизу в топологии поточечной сходимости нормы на пространствах вида* $C(K)$*, где* K *- линейно упорядоченный сепарабельный компакт* // Вестник Томского государственного университета – 2007. - № 298. – С. 117-119.
5. Кобылина М.С. Локально равномерно выпуклая норма на пространствах вида $C(K)$*, где* K *- неметризуемый линейно упорядоченный сепарабельный компакт* // Студент и научно-технический прогресс. Математика : Материалы XVIII международной научной студенческой конференции / Новосибирский государственный университет. – Новосибирск, 2005. – С. 75.
6. Гулько С.П., Кобылина М.С. Локально равномерно выпуклые нормы на некоторых пространствах непрерывных функций // Александровские чтения, посв. 110-летию со дня рожд. П.С. Александрова : Тезисы Международной топологической конференции, 30 мая – 2 июня 2006 г. / Московский государственный университет. – М., 2006. – С. 13.
7. Кобылина М.С. *LUR нормы на пространствах непрерывных функций на псевдодеревьях* // Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященная трехсотлетию Леонарда Эйлера : сб. материалов (Томск, 16 – 21 апреля) / Томский государственный университет. – Томск, 2007. – С. 142-144.