

На правах рукописи

Штоколова Маргарита Николаевна

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ  
ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Томск – 2008

Работа выполнена на кафедре математической физики физико-технического факультета ГОУ ВПО «Томский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Якутенок Владимир Альбертович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор  
Воеводин Анатолий Федорович,  
Институт гидродинамики им.  
М.А.Лаврентьева СО РАН,  
г. Новосибирск

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Бубенчиков Алексей Михайлович,  
Томский государственный университет,  
г. Томск

Ведущая организация: Институт механики сплошных сред  
УрО РАН

Защита состоится « 4 » июля 2008 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.13 при ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ГОУ ВПО «Томский государственный университет» по адресу: г. Томск, пр. Ленина, 34а.

Автореферат разослан « 21 » мая 2008 г

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
доктор технических наук

Ю.Ф. Христенко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена решению фундаментальных и прикладных задач о течениях идеальной и вязкой несжимаемых жидкостей со свободной поверхностью в плоской и осесимметричной постановках. Основой численного исследования рассматриваемых течений является метод граничных элементов.

**Актуальность темы.** Наличие свободной поверхности в области течения является характерной особенностью таких процессов, как распыление аэрозолей, нанесение покрытий, литье и многих других. Данное обстоятельство обуславливает неослабевающий интерес исследователей как к развитию методов решения, так и к более тщательному изучению конкретных задач, имеющих теоретическое и практическое значение.

В связи с нерегулярностью границ областей, характерной для исследуемых процессов, и сложностью математических постановок при количественном анализе трудно рассчитывать на получение аналитических результатов, и, как правило, решения большинства практических задач приходится искать с использованием численных методов. Многообразие задач, связанных с исследованием течений жидкости со свободной поверхностью, породило значительное количество численных методик, учитывающих особенности той или иной рассматриваемой проблемы. Зачастую при создании алгоритмов и их численной реализации исследователи используют специальные приемы, связанные с отслеживанием эволюции свободной границы и выполнением граничных условий на ней. Выбор того или иного подхода в решении определяется спецификой задачи и особенностями методов, имеющихся в арсенале исследователя. Эффективность метода напрямую влияет на возможность проведения точного численного эксперимента в заданном диапазоне изменения определяющих параметров.

В настоящей работе предложена методика использования непрямого варианта метода граничных элементов для задач о течении жидкости со свободной поверхностью, как удобный эффективный инструмент при рассмотрении течений в областях сложной геометрии, с большими деформациями свободной границы, при наличии нескольких, значительно различающихся характерных размеров.

В работе исследуются две задачи о течении несжимаемой жидкости со свободной поверхностью: 1) моделирование процесса колебаний капли идеальной жидкости под действием сил поверхностного натяжения в невесомости в плоской и осесимметричной постановках; 2) течение высоковязкой жидкости в

частично заполненном горизонтальном цилиндре, вращающемся вокруг собственной оси с постоянной скоростью.

В задачах о течении жидкости со свободной границей представляет интерес не только изучение собственно самого процесса, но также рассмотрение вычислительных особенностей, возникающих при численном моделировании и, в конечном итоге, разработка эффективного вычислительного алгоритма расчета конкретных течений.

Вторая из рассматриваемых задач – исследование вязкого течения со свободной поверхностью в горизонтальном вращающемся цилиндре – представляет существенный прикладной интерес для процессов химической технологии. Характер движения жидкости определяет эффективность реализации таких технологических процессов, как смешение, центробежное литье, нанесение покрытий и других. В рассматриваемой задаче актуальными вопросами являются построение устойчивых вычислительных методик расчета режимов течения, позволяющих определять необходимые кинематические и динамические характеристики внутри области течения.

В работе большое внимание уделяется построению вычислительных процедур, включающих подробное рассмотрение особенностей сингулярных гранично-интегральных уравнений в каждой конкретной задаче.

В связи с вышеизложенным, **целью** диссертационной работы является

- Разработка устойчивых вычислительных методик расчета плоских и осесимметричных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе непрямого метода граничных элементов.
- Исследование процесса колебаний капли невязкой несжимаемой жидкости под действием сил поверхностного натяжения в невесомости.
- Моделирование течения высоковязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре, проведение параметрических исследований процесса.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов подтверждается как внутренними проверками используемых методик расчета (проверка аппроксимационной сходимости, выполнение законов сохранения), так и согласованием с известными экспериментальными данными, а также с теоретическими результатами, полученными другими авторами.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

- ❖ Разработан и протестирован алгоритм реализации метода граничных элементов для осесимметричного случая; апробированы различные численные алгоритмы для расчета эволюции свободной поверхности, проведен их сравнительный анализ.

- ❖ Проведенное исследование колебаний капель идеальной жидкости позволило выявить влияние начальной деформации формы свободной поверхности на характеристики колебательного процесса.

- ❖ Сформулирована и реализована математическая постановка, позволяющая в рамках модели ползущего движения исследовать двумерное вязкое течение со свободной поверхностью внутри вращающегося горизонтального цилиндра. Разработана универсальная вычислительная методика на основе метода граничных элементов, использование которой позволило выявить установившиеся режимы течения высоковязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра; получить в широком диапазоне изменения определяющих параметров распределения кинематических и динамических характеристик внутри рассматриваемой области; исследовать эволюцию свободной границы.

**Практическая значимость.**

- ❖ Практическая ценность работ, посвященных исследованию процесса колебания капель, обусловлена широкими возможностями использования полученных результатов применительно к технологии спекания в порошковой металлургии, метеорологии, теории двухфазных потоков.

- ❖ Исследуемое в работе течение вязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре рассматривается как модель гидродинамического процесса, реализуемого в объемном (гравитационном) смесителе на стадии перемешивания. Предложенные модели позволяют получать хорошее согласование численных и экспериментальных данных по распределению характеристик течения, анализировать поля скоростей, распределения второго инварианта тензора напряжений, сдвиговых и сжимающих напряжений в области, занятой жидкостью, в широком диапазоне изменения определяющих параметров. Определены диапазоны изменения определяющих параметров, для которых при определении характеристик течения можно использовать приближенное решение [Haji-Sheich A., Lakchimanarayanan R., Lou David Y.S. Confined flow in a partially-filled rotating horizontal cylinder // Trans. ASME: J. Fluid Eng. 1985. V. 106. № 5. P. 270.].

Разработанные методики и пакеты прикладных программ внедрены в федеральном центре двойных технологий «Союз». Получено три акта внедрения программ расчета на предприятия ФГУП «ФЦДТ «Союз».

Работа выполнялась в рамках грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 06-08-00107а, 08-08-00064а), проекта ведомственной научной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 60320), договоров с ФГУП «Федеральный центр двойных технологий «Союз» (х/д №1073 от 04.06.2003г., х/д № 1056 от 27.01.2005г., х/д № 1044 от 01.07.2005г., х/д № 1/18 (1059) от 11.01.2006г. ), а также госконтракта с Роснаукой на выполнение научно-исследовательской работы молодыми учеными во время проведения стажировок в российских научно-образовательных центрах (госконтракт № 02.444.11.7137 от 26 октября 2005 г., конкурс по лоту N 2005-РИ-111.0/003).

***Основные положения, выносимые на защиту:***

1. Алгоритм реализации метода граничных элементов для расчета осесимметричных и плоских течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей;

2. Сравнительный анализ численных методик для расчета эволюции свободной поверхности;

3. Результаты численного анализа нелинейных колебаний капель идеальной несжимаемой жидкости под действием сил поверхностного натяжения;

4. Алгоритм решения задачи о течении вязкой жидкости, частично заполняющей вращающийся горизонтальный цилиндр;

5. Режимы течения, полученные при исследовании стационарных и квазистационарных гидродинамических процессов во вращающемся цилиндре;

6. Результаты расчетов кинематических, динамических характеристик и зависимости величины удельной мощности потока от определяющих параметров течения во вращающемся цилиндре.

***Апробация работы.*** Материалы диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции «Моделирование процессов в синергетических системах» (Улан-Удэ, 2002); на VIII Всероссийской научно-технической конференции «Механика летательных аппаратов и новые материалы» (Томск, 2003г); на IX Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (Красноярск, 2003); на Всероссийской научной конференции молодых ученых (НГТУ, Новосибирск, 2003); на X всероссийской научно-технической конференции «Физика и химия

высокоэнергетических систем» (Томск, 2004); на научной сессии молодых ученых научно-образовательного центра «Физика и химия высокоэнергетических систем» (Томск, 2004); на IV и V Всероссийских научных конференциях «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, 2004, 2006); на I, II и III Всероссийских конференциях молодых ученых «Физика и химия высокоэнергетических систем». (Томск, 2005, 2006, 2007); на VI Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, 2005); на Международной школе-конференции молодых ученых «Физика и химия наноматериалов» (Томск, 2005); на VI Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Ниж. Новгород, 2006); на XXII научной конференции стран СНГ «Дисперсные системы» (Украина, Одесса, 2006); XLV Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (НГУ, Новосибирск, 2007); на XIV Международном симпозиуме «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы» (Бурятия, 2007) и на Всероссийской конференции «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (ИГиЛ СО РАН, Новосибирск, 2007).

**Публикации.** Основные результаты диссертации представлены в трудах вышеперечисленных конференций, а также в журналах «Теоретические основы химической технологии», «Theoretical Foundations of Chemical Engineering», «Вычислительные технологии», «Известия вузов. Физика», «Оптика атмосферы и океана». Всего по материалам диссертации опубликовано 28 работ [1-28].

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Работа изложена на 137 страницах, содержит 30 рисунков, 4 таблицы, список литературы включает 201 наименование.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность и практическая значимость проведенного в работе исследования, сформулированы его цели и задачи; представлены положения, выносимые на защиту, описана структура диссертации.

**В первой главе** приведен краткий обзор современных численных методов и методик, применяемых для моделирования течений идеальной и вязкой жидкостей со свободными границами.

**Во второй главе** рассматривается процесс нелинейных колебаний капли идеальной несжимаемой жидкости под действием сил поверхностного натяжения в отсутствии силы тяжести в плоской и осесимметричной постановках.

В п.2.1. представлен краткий обзор работ, посвященных исследованию указанного процесса, отмечается его практическая направленность.

Математическая постановка задачи приведена в п.2.2. В плоском приближении моделируется процесс колебаний бесконечного цилиндра идеальной жидкости, который в начальный момент времени покоится и имеет в поперечном сечении форму эллипса с полуосями  $a, b$  (рис. 1). В осесимметричном случае моделируется процесс колебаний капли, которая в начальный момент времени покоится и имеет форму вытянутого эллипсоида вращения с полуосями  $a, b, c = a$  (рис. 2).

Таким образом, начальная форма свободной границы задается уравнением

$$f(\theta, t)|_{t=0} = \left( \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right)^{-1/2},$$

где  $f(\theta, t)$  – функция, определяющая свободную границу,  $\theta$  – полярный угол, отсчитываемый от горизонтальной оси  $x_1$ .

Потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1)$$

В качестве характеристики начальной деформации капли в работе используется отношение большей и меньшей полуосей –  $k = b/a$ ,  $k > 1$ . Начальное значение потенциала

$$\varphi = 0. \quad (2)$$

Граничное условие на свободной поверхности жидкости представляется в виде интеграла Коши-Лагранжа (безразмерная форма)

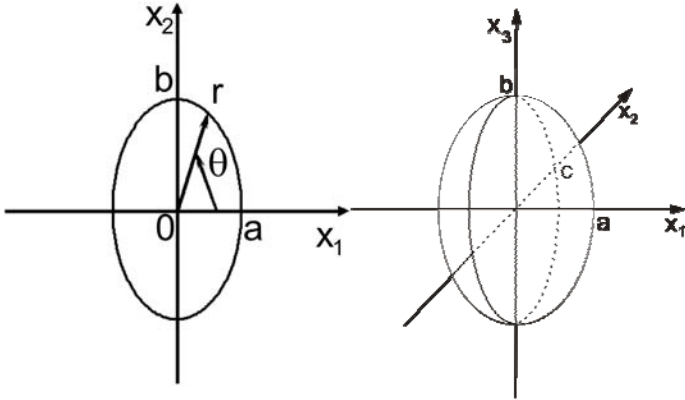
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \kappa \quad (3)$$

где  $\kappa$  – кривизна свободной поверхности,  $v_1, v_2$  – компоненты вектора скорости  $\vec{v}$ .

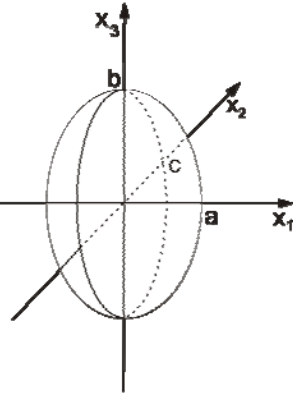
Поставленная задача в плоской и осесимметричной постановках решается методом граничных элементов (МГЭ) и методом конечных разностей (МКР), изложенными в п.2.3.

В данной задаче в качестве единственного параметра, определяющего характер течения и характеристики колебательного движения свободной поверхности выступает  $k = b/a$ .





**Рисунок 1** – Начальная форма области решения. Плоская постановка



**Рисунок 2** – Начальная форма области решения. Осесимметричная постановка

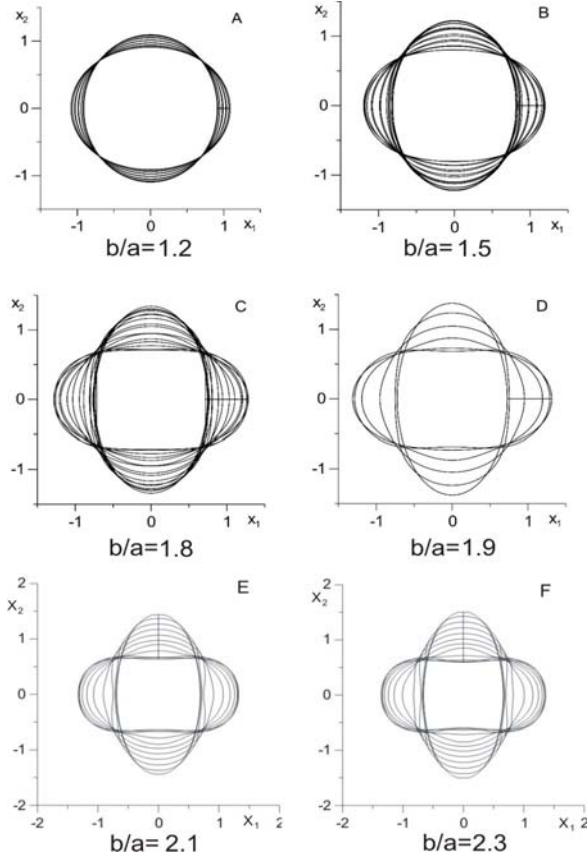
Для определения изменения формы свободной поверхности вдоль свободной границы располагается конечное число частиц, движение которых осуществляется в соответствии с эйлеровым (плоская и осесимметричная задачи) или лагранжевым (осесимметричная задача) представлением кинематического условия. В настоящей работе были исследованы следующие виды разностного представления кинематического условия на свободной границе: в лагранжевой форме со вторым порядком, в эйлеровой – с первым порядком, схема «предиктор-корректор» второго порядка и схема Рунге-Кутты четвертого порядка. Для реализации любого из используемых способов прежде всего необходимо решить краевую задачу (1)-(3), т.е. определить значения компонент вектора скорости на свободной поверхности.

В п.2.4. приведены результаты решения поставленной задачи. В плоском случае исходная задача решалась методом конечных разностей с использованием как метода Гаусса-Зейделя, так и метода установления на базе схемы продольно-поперечной прогонки. Величины периодов колебаний и последовательности форм свободной поверхности, полученные с применением различных схем, совпадают в диапазоне начальных деформаций  $1.005 \leq k \leq 2.0$ .

Формы свободной поверхности, полученные с использованием конечно-разностного алгоритма, полностью аналогичны полученным с использованием метода граничных элементов, представленным на

рис. 3. Как показало исследование, начиная с  $k = 1.9$ , в процессе колебаний наблюдаются гантелеобразные формы свободной поверхности (рис. 3).

В осесимметричном случае при решении поставленной задачи методом граничных элементов проведено тестирование различных алгоритмов расчета движения свободной поверхности.



**Рисунок 3** – Формы свободной поверхности, плоский случай, МГЭ. Величина начальной деформации  $k = 1.2$ (A),  $k = 1.5$ (B),  $k = 1.8$ (C),  $k = 1.9$ (D),  $k = 2.1$ (E),  $k = 2.3$ (F)

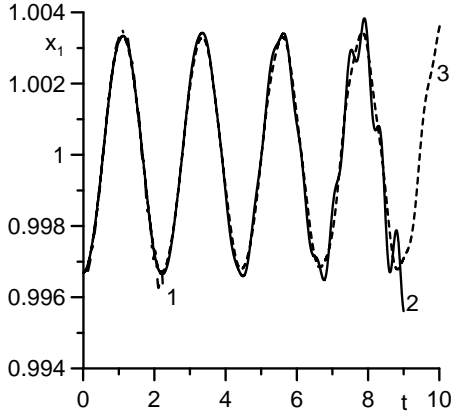
Как показали расчеты, МГЭ для осесимметричной задачи удовлетворительно работает лишь при малых (начальное соотношение полуосей эллипсоида  $k \leq 1.2$ ) деформациях свободной поверхности

вне зависимости от применяемого алгоритма расчета движения свободной границы. Этот результат отмечается также в работах [Lundgren T.S., Mansour N. N. Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects // J. Fluid Mech., 1988. –V. 194. – P. 479-510; Pozrikidis C. Three-dimensional oscillations of inviscid drops induced by surface tension. // Computers & fluids. 2001. – V.30. – P.417-444], исследующих процесс колебаний капли невязкой жидкости гранично-интегральным методом.

Тестирование различных алгоритмов расчета эволюции поверхности показало, что при малых начальных деформациях поверхности все используемые методы дают практически одинаковые значения периода колебаний. Характерной особенностью применения МГЭ к данной задаче является проявление неустойчивости движения свободной границы, что рано или поздно приводит к "развалу" расчетов. Основные отличия для примененных методов определяются двумя признаками: как скоро появится неустойчивость и произойдет прекращение расчета и каковы при этом будут ошибки вычисления массы капли. Проведенный анализ показал, что при реализации МГЭ в осесимметричном случае оптимальным алгоритмом для отслеживания эволюции капли является метод Эйлера (с использованием схемы разностей против потока). При сравнительно малых затратах вычислений траектории движения точек поверхности, полученные методом Эйлера первого порядка, практически идентичны (на этапе устойчивого счета) кривым, рассчитанным с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка, а также кривым, полученным с использованием лагранжевого представления второго порядка (рис. 4). При этом расчеты с помощью метода Эйлера с использованием схемы разностей против потока являются более устойчивыми по сравнению с другими применяемыми алгоритмами (например, для начальной деформации  $k=1.01$  указанный метод позволяет вести расчет более четырех периодов, в то время как лагранжевый алгоритм – в лучшем случае два периода). Ошибки в вычислении объема при этом близки по величине и составили 0,21%, 0,89% и 0,63% для схемы второго порядка в лагранжевой форме и для эйлера представления – схема разностей против потока и схема Рунге-Кутты соответственно. Это можно объяснить проявлением повышения устойчивости за счет схемной вязкости, присущей схеме Эйлера с разностями против потока.

Вывод о целесообразности использования схемы Эйлера для расчета эволюции поверхности жидкой капли получил подтверждение и в плоском случае в работе [Rush B. M., Nadim A. The shape oscillation

of a two-dimensional drop including viscous effects // Eng. Anal. Bound. Elements, 2000. – № 24. – P. 43-51].



**Рисунок 4** – Траектории движения вершины  $a$  эллипсоида при начальной деформации  $k=1.01$ . Осесимметричный МГЭ. Наиболее устойчивые варианты расчетов для лагранжевого алгоритма (кривая 1), схем Рунге-Кутты (кривая 2) и Эйлера (кривая 3).

Таким образом, в осесимметричной постановке методом граничных элементов удалось исследовать лишь колебания капель, обладающих малой начальной деформацией поверхности до  $k=1.2$ .

Как и в плоском случае, с целью сопоставления полученных результатов задача в осесимметричной постановке решалась также с использованием конечно-разностного алгоритма. В результате расчетов МКР получены значения периодов колебаний и формы свободной поверхности в диапазоне изменения начальной деформации капли от  $k=1.005$  до  $k=2.0$ .

Достоверность результатов определялась двумя параметрами: сохранением массы капли в течение процесса колебаний, а также сопоставлением полученного решения при малых начальных деформациях с аналитическим решением Рэлея. В процессе колебаний также велось наблюдение за изменениями кинетической, потенциальной энергий, а также за сохранением полной энергии капли.

Согласно классическому результату Рэлея [Рэлей Д. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1944. 476с] для малых колебаний капли невязкой жидкости в осесимметричной постановке справедлива формула

$$T = 2\pi(n(n-1)(n+2))^{-1/2}. \quad (4)$$

Так, для  $n = 2$  период

$$T = 2.2214. \quad (5)$$

В таблице 1 приведены значения периода колебаний капли, вычисленные в плоской и осесимметричной постановках.

**Таблица 1.** – Значения периодов колебаний для плоского и осесимметричного приближений

Соотношение полуосей $k$	Значение периода $T$			
	МКР (осесимм.)	МГЭ (осесимм.)	МКР (плоск.)	МГЭ (плоск.)
<b>1.01</b>	2,18	2,22	2.47	2.55
<b>1.1</b>	2,19	2,23	2.48	2.57
<b>1.2</b>	2,20	2,24	2.50	2.61
<b>1.5</b>	2,25	–	2.56	2.72
<b>1.7</b>	2,30	–	2.60	2.79
<b>1.8</b>	2,32	–	2.62	2.82

Период колебаний капли, вычисленный МКР в осесимметричном приближении отличается от (5) при  $k < 1.2$  не более чем на 2% , а при  $1.2 < k < 1.8$  – не более чем на 4.5%. Значения периода колебаний полученные с использованием МГЭ для осесимметричной задачи отличаются от значения Рэлея не более чем на 1%. Таким образом, подтверждается вывод работы [Сметанин С.В., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Численное исследование слияния капель вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. – № 6. – С. 27-33] о применимости формулы Рэлея для случаев нелинейных колебаний при значительных начальных деформациях капли – до  $k=1.2$  в осесимметричном случае.

Потери массы капли при расчетах МКР и МГЭ практически не отличаются в плоском случае (0.002% и 0.001% соответственно), тогда как в осесимметричном случае МКР показал себя как более точный (0.01% по сравнению с 0.89% МГЭ) и устойчивый метод расчета (при начальных деформациях  $k > 1.2$ ).

Следует отметить, что, начиная с  $k = 1.9$ , наблюдаются гантелеобразные формы свободной поверхности (рис. 3). С увеличением начальной деформации  $k$  период колебаний возрастает и в плоском, и в осесимметричном приближениях, что согласуется с выводами работы [Tsamopoulos J. A., Brown. R. A. Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech., 1983. – V. 127. – P. 519-537].

**В главе 3** в рамках численного моделирования с использованием модели ползущего течения, исследовано поведение

объема вязкой жидкости, заполняющего часть горизонтального цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

В п.3.1. представлен краткий обзор работ, посвященных исследованию течений жидкости со свободной поверхностью внутри цилиндра.

В п.3.2. приведена постановка задачи. В рамках модели ползущего течения движение жидкости описывается уравнениями Стокса и уравнением неразрывности, которые в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

где  $v_i$  – компоненты вектора скорости,  $x_i$  – декартовы координаты. В качестве масштаба скорости используется величина  $\omega \cdot R$ , масштаба длины –  $R$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения цилиндра,  $R$  – радиус цилиндра. Безразмерная величина модифицированного давления представляется в виде  $p = \bar{p}/(\mu\omega) - Wx_2$ , где  $\bar{p}$  – размерная величина давления,  $W = \rho|\bar{g}|R/(\mu\omega)$  – безразмерный комплекс, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил в потоке,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\bar{g}$  – вектор ускорения силы тяжести.

Граничное условие на твердой стенке – условие прилипания

$$v_1 = 1 - x_2, \quad v_2 = x_1 - 1. \quad (8)$$

На свободной поверхности задается условие отсутствия касательных напряжений и равенство нормального напряжения давлению внутри цилиндра

$$t_i(x) = (-p_0 + W_j x_j) n_i. \quad (9)$$

Для нахождения новой формы свободной границы используется кинематическое условие, которое записывается в эйлеровой форме как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \text{grad } f = 0, \quad (10 \text{ a})$$

или в лагранжевой форме

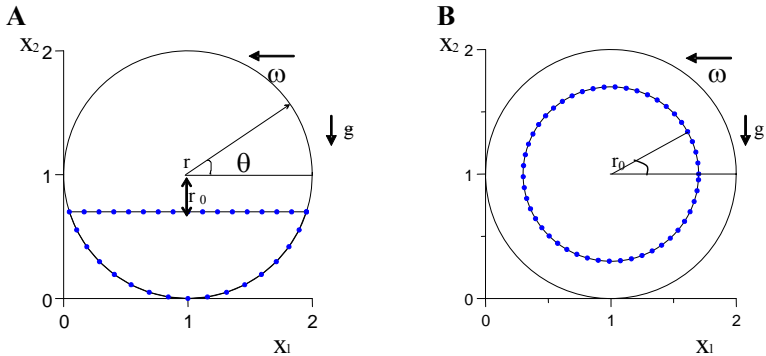
$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt}. \quad (10 \text{ б})$$

где  $f = f(\theta, t)$  – функция, описывающая свободную границу.

Задача рассматривается в плоской постановке, т.е. считается, что влиянием торцевых стенок на течение в рассматриваемом поперечном сечении цилиндра можно пренебречь.

Область течения в начальный момент времени и ее геометрические характеристики в безразмерном виде представлены на рис. 5. Начальная форма области, занятой жидкостью может быть задана в виде сегмента в нижней части цилиндра, при этом свободная поверхность горизонтальна, либо в виде окружности с центром на оси вращения цилиндра, что соответствует распределению жидкости слоем равномерной толщины на поверхности цилиндра.

Решение поставленной задачи осуществлялось непрямым методом граничных элементов, описанным в п.3.3. Стационарная форма свободной поверхности определялась методом последовательных приближений с использованием кинематического условия (10) с начальной формы, представленной на рис. 5 В.

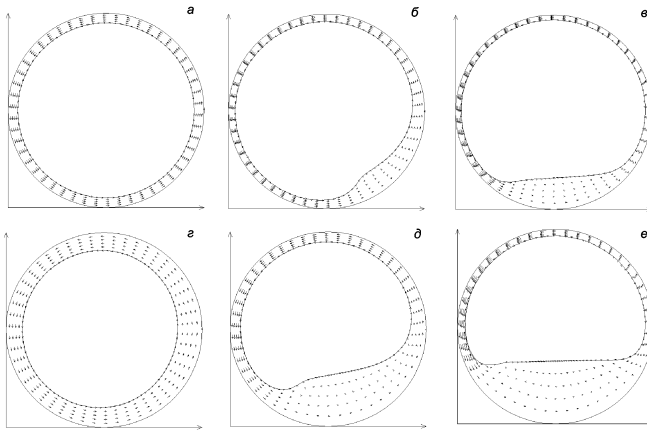


**Рисунок 5** – Течение в горизонтальном вращающемся цилиндре, начальная форма свободной поверхности: А – сегмент высотой  $(1-r_0) < R$ , В – окружность с центром на оси вращения цилиндра

В п. 3.4. представлены результаты численного исследования. В рассматриваемой задаче наряду с параметром  $W$  присутствует параметр  $\lambda$  – коэффициент заполнения (отношение объемов жидкости и цилиндра). В результате исследования *стационарного* движения ньютоновской жидкости во вращающемся цилиндре установлено, что существуют два режима установившегося течения в горизонтальном цилиндре, вращающемся с постоянной скоростью: с зоной возвратного течения и без нее.

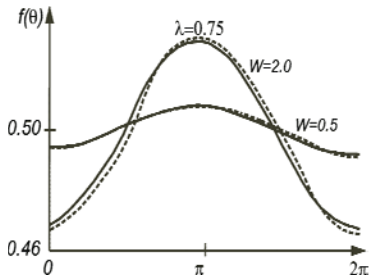
При  $W \rightarrow 0$  реализуется случай квазитвердого движения, и свободная поверхность имеет вид окружности. При возрастании  $W$  увеличивается толщина слоя на поднимающейся стороне цилиндра и уменьшается на опускающейся. Далее, при достижении некоторого критического значения  $W = W^*$ , происходит образование наплыва на свободной поверхности и зарождение в месте наплыва циркуляционной зоны. С ростом величины  $\lambda$  критическое значение  $W^*$  уменьшается. При достаточно больших значениях числа  $W$  практически весь объем жидкости находится в нижней части цилиндра и поверхность цилиндра, расположенная выше уровня жидкости, покрыта тонкой пленкой. Эволюция свободной поверхности и соответствующая структура течения при изменении чисел  $W$  и  $\lambda$  показаны на рис.6.

Для режима течения, реализующегося при  $W < W^*$ , проведены сравнения получаемых форм свободной поверхности с данными [Ott F.M., Scriven L.E. Rimming flow: numerical simulation of steady viscous free surface flow with surface tension // J. Fluid Mech. 1978. – V. 84. – № 1. – P. 145.] при  $\lambda = 0.75$ , показанные на рис. 7. На основе расчетов течения при различных значениях  $\lambda$  построена зависимость критического значения  $W^*$  от  $\lambda$ , показанная на рис. 8 сплошной линией.

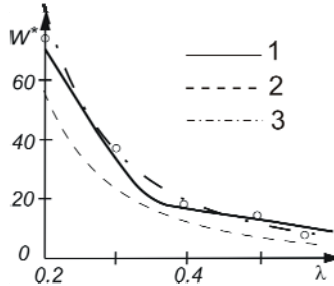


**Рисунок 6** – Формы свободной поверхности при  $\lambda = 0,19$  (а, б, в) и  $\lambda = 0,36$  (г, д, е),  $W = 50$  (а), 80 (б), 500 (в), 10 (г), 70 (д) и 500 (е).





**Рисунок 7** – Сравнение форм свободной поверхности при  $\lambda = 0.75$ ,  $W = 0.5$  (1) и 2 (2) по результатам настоящей работы (сплошные кривые) и данным [Orr F.M., Scriven L.E.] (штриховые линии).

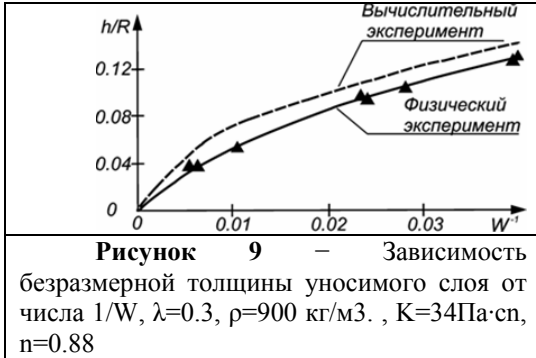


**Рисунок 8** – Зависимость критического числа  $W^*$  от коэффициента заполнения  $\lambda$ . (1) – полученное расчетным путем (настоящая работа); (2) – вычисленное по формуле [Fomin S. и др.]; (3) – предложенная формула. Точками отмечены данные эксперимента [Олицкий А.Ф., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А.].

Выше этой кривой реализуется течение с циркуляционной зоной, ниже – без нее, с небольшими отклонениями свободной поверхности от окружности. В работе [Fomin S., Watterson J., Raghunathan S., Harkin-Jones E. The run-off condition and hydraulic jump in rimming flow of a non-Newtonian fluid // Proceedings of the ASME 2001 Fluids Engineering Division Summer Meeting, New Orleans, 29 May–1 June 2001, Paper FEDSM 2001-18186] в приближении теории смазки получено условие перехода от первого вида течения ко второму. Это условие в безразмерной форме для ньютоновской жидкости формулируется с использованием равенства  $\lambda\sqrt{W^*} < \sqrt{2}$ . Численное исследование, представленное в настоящей работе позволяет уточнить условие существования однонаправленного течения:  $\lambda\sqrt{W^*} < \sqrt{3}$ , что согласуется с экспериментальными результатами, полученными в [Олицкий А.Ф., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Течение вязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре // Изв. РАН. МЖГ. 1993. – № 3. – С. 25-30].

На рис. 9 приведены экспериментальные и расчетные данные по зависимости средней толщины уносимого слоя  $h$  от числа  $W^{-1}$  (используется безразмерный параметр  $h/R$ , где  $R$  – радиус цилиндра).

За величину  $h$  приближенно принимали толщину уносимого слоя в верхней части потока, которую определяли по полученным в эксперименте фотографиям, либо по расчетной форме свободной поверхности. Экспериментальные зависимости  $h/R = f(W^{-1})$  получены для модельной смеси, описываемой степенным



реологическим законом, при  $\lambda=0,3$ ,  $K=34$  Па·с<sup>n</sup>,  $n=0,88$ ,  $\rho=900$  кг/м<sup>3</sup>. Параллельно построена расчетная кривая при  $\lambda=0,3$ . Видно, что обе кривые весьма близки друг другу, что также подтверждает адекватность расчетной модели.

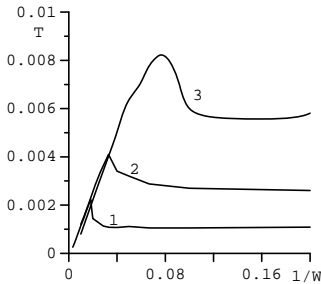
Незначительная разница может быть объяснена как экспериментальными погрешностями, так и влиянием аномалии вязкости модельной среды.

В качестве характеристики интенсивности перемешивания жидкости в данном течении может использоваться величина удельной мощности [Стренк Ф. Перемешивание и аппараты с мешалками. Польша, 1971. Пер с польск. Под ред. Щупляка И.А. Л., "Химия", 1975]. Представляет интерес выяснение характера зависимости величины  $N_{уд}$  от скорости вращения цилиндра  $\omega$  при прочих равных условиях. Такой зависимости для заданного значения  $\lambda$  соответствует функция безразмерного комплекса  $T = N_{уд} \cdot (\mu / (\rho g R))^2$  от безразмерного аргумента  $1/W = \mu \omega / (\rho g R)$ . Характер полученных в расчетах зависимостей иллюстрирует рис. 10. наличие максимумов на кривых показывает возможность выбора частоты вращения цилиндра, обеспечивающей максимальную интенсивность перемешивания при прочих равных условиях. Зависимость удельной мощности перемешивания от частоты вращения имеет экстремальный характер, что впервые показано расчетным путем и также подтверждено экспериментально [Меркулов В.М., Банзула Ю.Б., Ляханов Ю.А., Глушков И.А., Карязов С.В., Муханова Л.М., Шрагер Г.Р., Якутенко В.А. Штоколова М.Н. Расчетно-экспериментальная оценка параметров течения во вращающемся объемном смесителе композиций с высокой

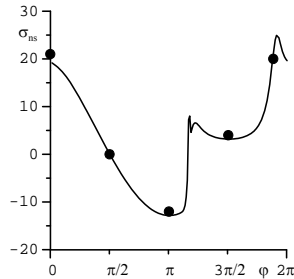
адгезией к стенкам аппарата //ФГУП «ФЦДТ «Союз», г. Дзержинский, научно-технический отчет о НИР № 286/18, 2004г].

Получены распределения нормального и касательного напряжений на стенке. Сравнение результатов расчета касательного напряжения на стенке с приближенным решением [Haji-Sheich A., Lakchimanarayanan R., Lou David Y.S. Confined flow in a partially-filled rotating horizontal cylinder // Trans. ASME: J. Fluid Eng. 1985. V. 106. № 5. P. 270] представлено на рис. 11 (сплошной линией изображены результаты настоящей работы).

Хорошее согласование представленной зависимости подтверждает обоснованность приближения, используемого в работе [Haji-Sheich A., Lakchimanarayanan R., Lou David Y.S.], для описания предельного режима течения, когда практически весь объем жидкости находится в нижней части цилиндра.



**Рисунок 10** — Зависимость безразмерной величины удельной мощности  $T$  от безразмерной скорости вращения  $1/W$  (кривая 1 —  $\lambda = 0,2$ ; 2 —  $\lambda = 0,3$ ; 3 —  $\lambda = 0,51$ ).

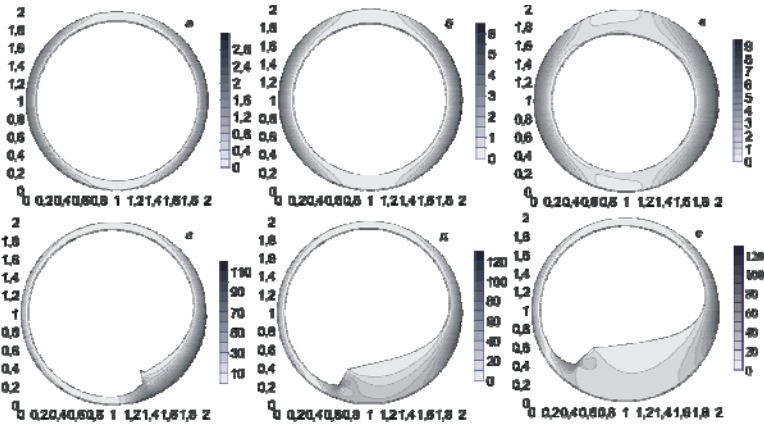


**Рисунок 11** — Безразмерное касательное напряжение на стенке (сравнение с приближенным решением [Haji-Sheich A., Lakchimanarayanan R., Lou David Y.S.]),  $W = 500$ ,  $\lambda = 0.3$ .

Метод граничных элементов позволяет непрерывным образом вычислять значения необходимых функций в области решения. Вследствие этого, используя множество внутренних точек произвольной структуры и соответствующие графические программные средства, становится возможным визуализация рассчитанных полей.

Вычисление энергии вязкой диссипации внутри области течения можно осуществить по формуле  $E_D = \mu \cdot E_2 = T_2 / \mu$ , где  $E_2$ ,  $T_2$  — вторые инварианты тензоров скоростей деформаций и напряжений соответственно.

Безразмерный аналог этих равенств имеет вид  $E_D = E_2 = T_2$ . Таким образом, вычисление распределения безразмерной величины  $T_2$  позволяет одновременно оценивать напряженное состояние в области течения и тепловыделения за счет вязкой диссипации. Распределения  $T_2$  для различных чисел  $W$  и  $\lambda$  приведены на рис. 12. Как следует из этих рисунков, увеличение коэффициента заполнения емкости  $\lambda$  приводит к росту максимальных значений интенсивности напряжений, а, следовательно, и повышению локальных тепловыделений за счет вязкой диссипации.

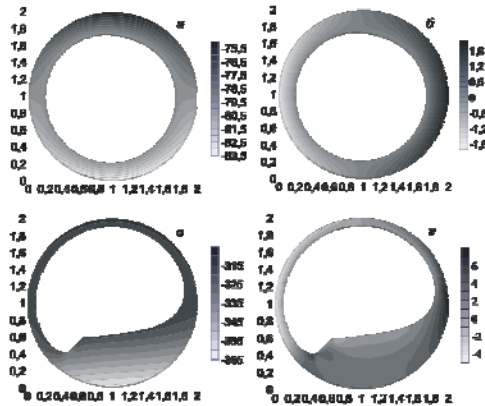


**Рисунок 12** – Распределение интенсивности напряжений по области течения при  $\lambda = 0,2$  (а, г),  $\lambda = 0,3$  (б, д) и  $\lambda = 0,4$  (в, е),  $W = 15$  (а, б, в),  $70$  (г, д, е)

На рис. 13 представлены распределения безразмерных значений компонент тензора напряжений

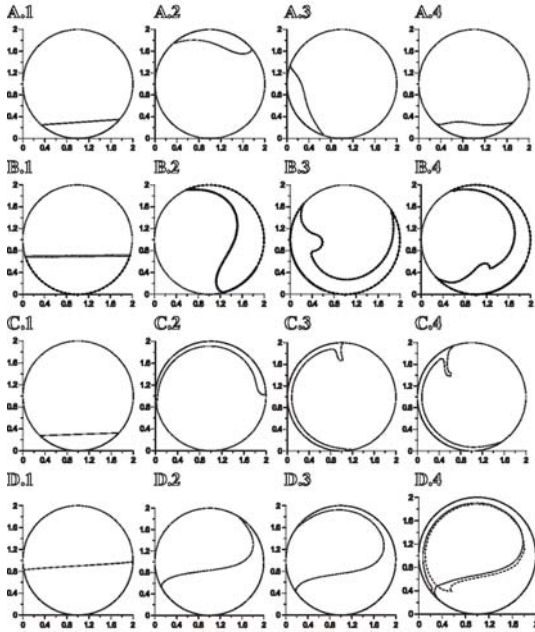
$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}, \quad \sigma_{rr} = -p + 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

С целью исследования характера течения при переходе от начального горизонтального положения к некоторой стационарной форме начальная форма области задается в виде, представленном на рис. 5 А. Расчеты для этого случая проведены при  $\lambda = 0.094 \div 0.436$  ( $r_0 = 0.7 \div 0.1$ ) и  $W = 5 \div 50$  (рис. 14).



**Рисунок 13** – Распределения безразмерных значений компоненты  $\sigma_{rr}$  (а, в) и  $\sigma_{r\theta}$  (б, г) тензора напряжений в потоке при  $\lambda = 0,4$ ,  $W = 15$  (а, б), 70 (в, г)

Как следует из рис. 14 А) при  $W = 5$ ,  $\lambda = 0.094$  осуществляется фактически квазитвердое вращение объема жидкости с малыми деформациями свободной поверхности, по крайней мере, на протяжении двух периодов (значение безразмерного времени совпадает с углом поворота цилиндра вокруг своей оси). При этом величина смоченной поверхности твердой стенки растет чрезвычайно медленно. В случае, показанном на рис. 14 В, реализуется течение, сочетающее формирование пристеночного слоя жидкости и образование наплыва с элементами циркуляционного движения. Вариант 14 С показывает, что возможно появление каплевидных образований, что классифицируется в технологии центробежного литья как эффект «дождевания» [Юдин С.Б., Левин М.М., Розенфельд С.Е. Центробежное литье. М.: Машиностроение. - 1972. 280 с]. Наличие такого типа поведения свободной поверхности подтверждается также данными работы [Deiber J.A., Cerro R.L. Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum // Ind. and Eng. Chem., Fundam., 1976. – V. 15. – № 2. – P. 102]. Вариант D относится к случаю, когда основная масса жидкости остается в нижней части цилиндра, а на поднимающейся стенке образуется достаточно тонкая пленка. Смачивание внутренней поверхности для конкретных  $\lambda$  происходит тем быстрее, чем больше число  $W$ .



**Рисунок 14** – Эволюция формы свободной поверхности при  $W = 5$ ,  $\lambda = 0.094$  ( $r_0 = 0.7$ ): A.1 ( $t = 0.069$ ), A.2 ( $t = 3.082$ ), A.3 ( $t = 5.172$ ), A.4 ( $t = 12.606$ );  $W = 10$ ,  $\lambda = 0.312$  ( $r_0 = 0.3$ ): B.1 ( $t = 0.001$ ), B.2 ( $t = 2.313$ ), B.3 ( $t = 7.173$ ), B.4 ( $t = 8.640$ );  $W = 50$ ,  $\lambda = 0.094$  ( $r_0 = 0.7$ ): C.1 ( $t = 0.032$ ), C.2 ( $t = 4.130$ ), C.3 ( $t = 5.708$ ), C.4 ( $t = 6.071$ ) и  $W = 50$ ,  $\lambda = 0.436$  ( $r_0 = 0.1$ ): D.1 ( $t = 0.074$ ), D.2 ( $t = 1.103$ ), D.3 ( $t = 2.621$ ), D.4 ( $t = 3.942$ ) - штриховой линией представлена установившаяся форма свободной поверхности.

Формы свободной поверхности в момент её замыкания хорошо согласуются со стационарными формами, полученными методом последовательных приближений из начального положения в виде, представленном на рис.5 В, что иллюстрируется рисунком 14 D.4). Штриховой линией показана стационарная форма.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан и протестирован алгоритм реализации метода граничных элементов для осесимметричной задачи; апробированы различные алгоритмы расчета эволюции свободной поверхности, проведен их сравнительный анализ.

2. Обнаружено, что период колебаний осесимметричной капли, а также бесконечного цилиндрического объема идеальной жидкости возрастает с увеличением начальной деформации.

3. При рассмотрении процесса колебаний во всех рассмотренных случаях, начиная с  $k = 1.9$  наблюдаются гантелеобразные формы свободной поверхности, что позволяет предположить существование критических начальных деформаций, приводящих к дроблению капель.

4. Выявлены два режима установившегося течения высоковязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра; получены критические значения параметров, разделяющие эти режимы. Полученные данные подтверждаются результатами экспериментов.

5. На основе непрямого метода граничных элементов разработан алгоритм расчета кинематических и динамических характеристик течения жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра. Проведены параметрические исследования указанных характеристик процесса в широком диапазоне изменения коэффициента заполнения  $\lambda$  и безразмерного комплекса  $W$ . Распределение сдвиговых и сжимающих напряжений позволяет оценить взаимодействие частиц жидкости в потоке и на границах области, а значение второго инварианта тензора напряжений – выделить зоны с максимальным тепловыделением.

6. Представлены зависимости величины удельной мощности потока от определяющих параметров, позволяющие получить косвенное представление об эффективности перемешивания жидкости в рассматриваемом течении. Зависимость удельной мощности перемешивания от частоты вращения имеет экстремальный характер, что впервые показано расчетным путем и также подтверждено экспериментально.

7. Сформулирована и реализована математическая постановка задачи, позволяющая определить эволюцию свободной границы на начальном этапе вращения цилиндра из положения горизонтальной свободной границы. В результате параметрических исследований определены особенности формирования свободной границы на начальном этапе вращения в зависимости от определяющих параметров. Здесь выявлены четыре типа поведения свободной поверхности:

1) практически квазитвердое поведение (рис. 14 А) с небольшими искажениями плоской свободной поверхности на достаточно большом промежутке времени;

2) образование на переходном этапе наплывов на свободной поверхности, с последующим их исчезновением и установлением

формы в виде слоя, покрывающего всю внутреннюю поверхность цилиндра (рис.14 В);

3) течение с отрывом капель (рис. 14 С);

4) образование зоны циркуляционного течения в нижней части цилиндра и тонкого слоя на остальной части твердой стенки (рис. 14 D).

### **Список публикаций по теме диссертации**

1. Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Нелинейные колебания объема жидкости под действием сил поверхностного натяжения // Моделирование процессов в синергетических системах: Сб. статей. –Улан-Удэ – Томск: Изд-во ТГУ, 2002. – С. 65-67.
2. Якутенок В.А., Штоколова М.Н. Сравнение прямого и непрямого вариантов МГЭ для задачи с угловыми точками // Механика летательных аппаратов и новые материалы: Сб. избранных докладов VIII Всероссийской научно-технической конференции./ Под ред. Э.Р. Шрагера. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – С. 51-53.
3. Штоколова М.Н. О методах расчета потенциальных течений со свободной поверхностью // Девятая всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых: Тезисы докладов: В 2 т. Т. 1 – Екатеринбург- Красноярск: Изд-во АСФ России, 2003. – С. 417-419.
4. Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Исследование периода колебаний капли невязкой жидкости // Физика и химия высокоэнергетических систем: Сб. избранных докладов научно-технической конференции / Под ред. Э.Р. Шрагера. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003. – С. 46-47.
5. Штоколова М.Н. Моделирование процесса колебаний капли невязкой жидкости методами граничных элементов и конечных разностей // Материалы докладов всероссийской научной конференции молодых ученых в 6-ти ч. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – Ч. 1. – С. 169-170.
6. Штоколова М.Н. Моделирование течения вязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре методом граничных элементов // Физика и химия высокоэнергетических систем: Материалы научной сессии молодых ученых научно-образовательного центра. – Томск: ИФПМ СО РАН, 2004. – С 73-74.
7. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Численное исследование процесса смешения в смесителях барабанного типа. //Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции. – Томск: изд-во Том. ун-та, 2004. – С. 325-326.
8. Штоколова М.Н. Исследование колебания капли под действием поверхностного натяжения. //Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Доклады конференции. – Томск: изд-во Том. ун-та, 2004. – С. 327-328.



9. Банзула Ю. Б., Глушков И. А., Карязов С. В., Меркулов В. М., Милехин Ю. М., Шрагер Г. Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Исследование процесса течения вязко-текучих композиций в смесителях барабанного типа //Материалы II Всероссийской конференции "Энергетические конденсированные системы" памяти академика Б.П. Жукова (9-13 ноября 2004г.) - г. Черноголовка. 2004 г. – С 83.
10. Штоколова М.Н., Якутенко В. А. Вычислительные проблемы моделирования задачи о колебаниях капли //Материалы I всероссийской конференции молодых ученых «Физика и химия высокоэнергетических систем». – Томск: изд-во Том. ун-та, 2005. – С. 240-242.
11. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А, Милехин Ю.М., Меркулов В.М., Банзула Ю.Б., Карязов С.В., Глушков И.А. Моделирование вязкого течения со свободной поверхностью внутри вращающегося горизонтального цилиндра //Теоретические основы химической технологии, 2005. – Т. 39. – № 3. – С. 303-309.
12. G.R. Shrager, M.N. Shtokolova, V. A. Yakutenok, Yu. M. Milekhin, V. M. Merkulov, Yu. B. Banzula, S. V. Karyazov, and I. A. Glushkov Modeling of the Viscous Flow with a Free Surface inside a Rotating Horizontal Cylinder //J. Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – Vol. 39. – N. 3, 2005. – pp. 283–289.
13. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А Моделирование задач динамики жидкости со свободными границами непрямым методом граничных элементов //Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике». Тезисы докладов – Новосибирск: ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005. – С 181.
14. Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Моделирование течений неньютоновской жидкости методом граничных элементов //Физика и химия наноматериалов: Сб. материалов международной школы-конференции молодых ученых (13-16 декабря 2005г.). – Томск: ТГУ, 2005. – С.499-502.
15. Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Применение линейной аппроксимации в методе граничных элементов для моделирования течений вязкой жидкости //Материалы II Всероссийской конференции молодых ученых «Физика и химия высокоэнергетических систем». – Томск: изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 348-351.
16. Ю.Б. Банзула, С.В. Карязов, В.М. Меркулов, Ю.М. Милехин, А.В. Новошинцев, Г.Р. Шрагер, В.А., М.Н. Штоколова, В.А.Якутенко Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных композиций методом свободного литья // Аннотации докладов IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2006. – С. 21-22.
17. Штоколова М.Н, Якутенко В.А. Применение линейной аппроксимации в методе граничных элементов для моделирования течений вязкой

жидкости //Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Докл. V всеросс. конференции. – Томск: изд-во Том. ун-та, 2006. – С. 561-562.

18. Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Численное моделирование колебаний невязкой капли под действием поверхностного натяжения //«Дисперсные системы»: Тезисы докладов XXII научной конференции стран СНГ – Одесса, Одесский нац. ин-т им. И. Мечникова, изд-во «Астропринт». - 2006. – С. 373-374.

19. Якутенко В.А., Штоколова М.Н. Численное моделирование плоских течений неньютоновской жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // «Вычислительные технологии», 2006. – Т. 11. – № 5. – С. 106-118.

20. Шрагер Г.Р., Якутенко В.А., Штоколова М.Н. Расчет динамических характеристик течения в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре //Иzv. вузов. Физика. – 2006. - Т. 49. – № 6. Приложение. - С. 167-171.

21. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Численное моделирование течения вязкой жидкости, частично заполняющей горизонтальный вращающийся цилиндр //Материалы XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика/ Новосибир. Гос. Ун-т. Новосибирск, 2007. – С. 65.

22. Штоколова М.Н., Формирование различных режимов течения вязкой жидкости в частично заполненном горизонтальном вращающемся цилиндре //Физика и химия высокоэнергетических систем: Сб. материалов III Всероссийской конференции молодых ученых (24-27 апреля 2007г.). – Томск: ТМЛ-Пресс, 2007. – С. 250-252.

23. Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Численное моделирование колебаний невязкой капли под действием поверхностного натяжения //Оптика атмосферы и океана, 2007г. – Т. 20. – № 07. – С. 609-613.

24. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Моделирование процессов слияния и колебаний капель в условиях невесомости //XIV Международный симпозиум «Оптика атмосферы и океана. Физика атмосферы». Россия. Бурятия. 24–29 июня 2007. – С. 179.

25. Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Эволюция свободной поверхности вязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра //Всероссийская конференция «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» // Тезисы докладов – Новосибирск: ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2007. – С. 188.

26. Меркулов В.М., Банзула Ю.Б., Карязов С.В., Глушков И.А., Шрагер Г.Р., Штоколова М.Н., Якутенко В.А. Закономерности процессов перемешивания высоковязких композиций в смесителях барабанного типа //Химическая технология: Сб. тезисов докладов Международной

конференции по химической технологии ХТ'07.– М.: ЛЕНАНД, 2007. – Т.2 – С. 204-206.

27. M.N. Shtokolova, V. A. Yakutenok Numerical simulation of inviscid drop oscillations induced by the surface tension // *J. Atmospheric and Oceanic Optics*, 2007, vol. 20, No.07, p. 557-560.

28. Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Эволюция свободной поверхности объема вязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра // Математические модели физических процессов: Материалы 12й международной научной конференции (14-15 сентября 2007г.) – Таганрог: изд-во ТГПИ, 2007. – Т.1. – С. 121-126.