На правах рукописи

ОСИПОВ ОЛЕГ СЕРГЕЕВИЧ

ПЕРЕСТАНОВКИ ИНТЕГРАЛОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность: 01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Томск 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа Томского государственного университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Сибиряков Геннадий Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Водопьянов Сергей Константинович
доктор физико-математических наук, профессор
Гулько Сергей Порфирьевич

Ведущая организация: Вычислительный центр ДВО РАН

Защита состоится 17 декабря 2009 г. в 14:45 часов на заседании диссертационного Совета Д212.267.21 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан   ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного Совета Д212.267.21
канд. физ.-мат. наук, доцент   А.Н. Малютина

Актуальность темы. В задаче 106 «Шотландской книги» [The Scottish book // edited by R. Daniel Mauldin. – Boston: Birkhäuser, 1981] С. Банах сформулировал следующий вопрос. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – такой ряд в банаховом пространстве, что при двух определенных упорядочиваниях его слагаемых сумма равна элементам y_0 и y_1 соответственно. Доказать, что для любого вещественного l существует такое упорядочивание слагаемых данного ряда, что сумма равна $ly_0 + (1-l)y_1$.

М. И. Кадец ввел определение *области сумм* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ векторов банахова пространства X как множества всех таких $y \in X$, что при некоторой перестановке π натуральных чисел ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к y [Кадец М.И. Об условно сходящихся рядах в пространстве L_p // Успехи матем. наук. – 1954. – Т. 54, 1. – С. 107-110]. В случае условно сходящихся числовых рядов согласно классической теореме Римана область сумм совпадает с множеством всех вещественных чисел. Для рядов комплексных чисел описание области сумм было дано П. Леви в 1905. Е. Штейниц в 1913 г. доказал следующую теорему [Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe systeme // J. Reine Angrew. Math. – 1913. – V. 143. – P. 128-175; 1914. – V. 144. – P. 1-49; 1916. – V. 146. – P. 68-111]: область сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в m-

мерном пространстве X есть подпространство вида $s+\Gamma_0$, где s – сумма указанного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, Γ_0 – аннулятор множества $\Gamma=\{f\in X^*;\ \sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$ сходится $\}$.

В бесконечномерном банаховом пространстве аналог теоремы Штейница не верен, и область сумм ряда может быть нелинейной (Марцинкевич [The Scottish book // edited by R. Daniel Mauldin. – Boston: Birkhäuser, 1981], Е. Никишин [Никишин Е.М. Перестановки функциональных рядов // Матем. сб. – 1971. – т. 85(127). – С. 272-286]), незамкнутой (М. И. Островский [Островский М.И. Области сумм условно сходящихся рядов в банаховых пространствах // Теория функций, функциональный анализ и приложения. – 1986. – № 6. – С. 77-85.]), состоять из нескольких точек (М.И. Кадец и К. Возняковский [Kadets M.I., Wozniakowski K. On series whose permutations have only two sums // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1989. – V. 37. – P. 15-21.], П. А. Корнилов [Корнилов П.А. О множестве сумм условно сходящегося функционального ряда // Математический сборник. – 1988. – 1 (9). – С. 114-127]).

Из курса анализа хорошо известна аналогия между свойствами числовых рядов и несобственных интегралов. Естественно возникает вопрос: что можно сказать о множестве тех чисел или векторов, к которым сходится «перестановка» условно сходящегося интеграла

$\int\limits_{0}^{\to+\infty} f(x)\,dx$? Останется ли справедливым аналог теоремы Римана, аналог теоремы Штейница? Каковы свойства «области сумм» несобственного интеграла в бесконечномерном пространстве и что можно сказать относительно интегральных аналогов рядов, для которых не выполняется утверждение теоремы Штейница? Эти вопросы изучаются в данной работе.

Цель работы. Целью работы является получение новых результатов о свойствах перестановок и областей сумм несобственных интегралов в банаховых пространствах, исследование интегральных аналогов рядов с нелинейной областью сумм.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

1. Рассмотрено новое понятие – перестановка измеримого пространства. Установлена связь между автоморфизмами метрической булевой алгебры и перестановками на измеримом пространстве Лебега-Рохлина. Установлена связь между невозрастающими перестановками функций Харди-Литтльвуда и перестановками на измеримом пространстве $\big([0,+\infty),\mu\big)$, где μ – мера Лебега.

2. Доказано, что область сумм интегрального аналога ряда Марцинкевича-Никишина-Корнилова совпадает с пространством $L_p[0,1]$.

3. Доказано, что область сумм интегрального аналога ряда Корнилова (область сумм ряда состоит из двух точек) совпадает с множеством постоянных функций пространства $L_p[0,1]$.

4. Рассмотрен подкласс перестановок π пространства $\left([0,+\infty),\mu\right)$, где μ – мера Лебега, со свойством $\pi[a,b)=\bigcup_{n=1}^{N}[c_n,d_n)$ для любых неотрицательных чисел a, b. Доказано, что область сумм несобственного интеграла в любом конечномерном нормированном пространстве при указанных перестановках является аффинным множеством.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть полезны специалистам, работающим в областях функционального анализа, связанных с рядами, теорией меры, интегралами Лебега-Бохнера.

Апробация работы. Основные результаты и положения работы были доложены:

– на XLIV, XLV и XLVI международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс», г. Новосибирск, 2006 г., 2007 г. и 2008 г.

– на научной конференции молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященной трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера, г. Томск, 2007 г.

– на XV международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, 2008 г.

– на международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии», г. Новосибирск, 2009 г.

– на семинарах по функциональному анализу кафедры математического анализа Томского государственного университета, 2006 г., 2007 г., 2008 г., 2009 г.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 2 статьи и 4 тезиса докладов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, содержащего 24 наименования. Первая глава состоит из двух разделов, вторая – из четырех разделов, третья – из трех разделов. Объем диссертации – 74 страницы.

Содержание работы. В **первой главе** рассматривается основной вопрос, какой может быть область сумм ряда в банаховом пространстве. Приводятся некоторые известные результаты для конечномерного и бесконечномерного случая. Затем проводится аналогия между рядами и несобственными интегралами, и ставятся базовые вопросы: «Что можно сказать об области сумм несобственного интеграла в банаховом пространстве?», «Является ли это множество линейным, замкнутым?», «Что следует считать перестановкой интеграла и каковы ее свойства?».

Во **второй главе** вводится

Определение. Пусть Δ – δ-кольцо подмножеств множества S. Измеримое отображение $\pi : S \to S$ называется *перестановкой*, если существуют такие множества N_1, $N_2 \in \Delta$, что $\mu N_1 = \mu N_2 = 0$, $\pi : S \setminus N_1 \to S \setminus N_2$ – биекция, для которой $\pi A \in \Delta$ и $\mu\left(\pi A\right) = \mu A$ для любого $A \in \Delta$.

Доказываются простейшие свойства перестановок на измеримом пространстве:

(a) *Пусть отображения* $\pi : S \to S$ *и* $\sigma : S \to S$ *являются перестановками. Тогда отображение* $\eta : S \to S$, $\eta = \pi \circ \sigma$, *является перестановкой.*

(b) *Пусть отображение* $\pi : S \to S$ *является перестановкой,* $\pi : S \setminus N_1 \to S \setminus N_2$ *– измеримая биекция,* $\mu N_1 = \mu N_2 = 0$, *измеримое отображение* $\sigma : S \to S$ *таково, что* $\sigma(t) = \pi^{-1}(t)$ *при* $t \in S \setminus N_2$. *Тогда отображение* σ *является перестановкой.*

Приводится конструкция метрической булевой алгебры, формулируются основные результаты относительно изоморфизмов и доказывается

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\left(M, \mathcal{M}, \mu\right)$ *– пространство с мерой* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, *где* $\mathcal{M}$ *–* σ*-алгебра, полная относительно меры*

μ. *Пусть мера* $\nu : \mathcal{M} \to [0,1]$ *задана по правилу* $\nu\left(A\right) = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\mu A\right)$ *для любого* $A \in \mathcal{M}$, E_ν *– метрическая булева алгебра с мерой* ν. *Пусть пространство* $\left(M, \mathcal{M}, \nu\right)$ *является пространством Лебега-Рохлина. Тогда если отображение* $\pi : M \to M$ *является перестановкой, то существует автоморфизм* $p : E_\nu \to E_\nu$ *такой, что* $p\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{\pi\left(A\right)}$; *если* $p : E_\nu \to E_\nu$ *– автоморфизм, то существует перестановка* $\pi : M \to M$ *такая, что* $p\left(\widetilde{A}\right) = \widetilde{\pi\left(A\right)}$.

Далее устанавливается связь между перестановками и невозрастающими перестановками функций. Напомним, что если f – числовая измеримая функция, тогда функция

$$f^*(t) = \inf\left\{y \ge 0; \mu\left\{s; \left|f(s)\right| > y\right\} \le t\right\}$$

называется *невозрастающей перестановкой функции* f [Богачев В.И. Основы теории меры: В 2-х томах. Т. 2. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, с. 280].

Теорема 2.4.2. *Пусть* $\pi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *– перестановка. Тогда существует такая функция* $\varphi : [0, +\infty) \to (0,1]$, *что* $\varphi\left(\pi(t)\right) = \varphi^*(t)$, *где* φ^* *является невозрастающей перестановкой функции* φ.

Обратное неверно (пример 2.4.1): для функции $\varphi:[0,2)\to[0,1)$, $\varphi(t)=\{t\}$ – дробная часть t, не существует перестановки $\pi:[0,2)\to[0,2)$ такой, что $\varphi(t)=\varphi^*\left(\pi(t)\right)$.

В начале **третьей главы** вводятся определения. Пусть X – банахово пространство и пусть отображение $x:[0,+\infty)\to X$ таково, что существует несобственный интеграл Лебега-Бохнера

$$\int_0^{\to+\infty} x(t)dt=\lim_{\tau\to+\infty}\int_0^{\tau} x(t)dt\,.$$

Определение. *Областью сумм интеграла* $\int_0^{\to+\infty} x(t)dt$ называется множество $OC\left(\int_0^{\to+\infty} x(t)dt\right)$ – множество таких элементов $y\in X$, что $\int_0^{\to+\infty} x\left(\pi(t)\right)dt=y$ при некоторой перестановке $\pi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$.

Определение. Говорят, что интеграл $\int_0^{\to+\infty} x(t)dt$ *сходится условно*, если он сходится, и существует перестановка $\pi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ такая, что несобственный интеграл $\int_0^{\to+\infty} x\left(\pi(t)\right)dt$ расходится.

Рассмотрим ряд Марцинкевича-Никишина-Корнилова. Возьмём в пространстве $X=L_p[0,1]$ следующую систему функций:

$$e_k^m(t)=\begin{cases}1,\xi\in\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right),\\ 0,\xi\in[0,1)\setminus\left[\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}\right),\end{cases}$$

$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $k\in\{0,\dots,2^m-1\}$.

Составим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k=e_0^0-e_0^0+e_0^1-e_0^1+e_1^1-e_1^1+e_0^2-e_0^2+\dots$.

Его область сумм не обладает свойством аффинности.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $p\ge 1$ *и отображение* $x:[0,+\infty)\to L_p[0,1]$ *действует по правилу:* $x(t)=x_k$ *при* $t\in[k,k+1)$, $k=0,1,\dots$. *Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_0^{\to+\infty}x(t)\,dt$ *сходится и имеет область сумм, равную* $L_p[0,1]$.

Рассмотрим ряд Корнилова, область сумм которого состоит из двух точек. Пусть система $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\psi_n:[0,1)\to[0,1)$, является системой независимых, равномерно распределенных функций. Пусть $\varphi_{n,i}^{+}:[0,1)\to\{0,1\}$,

$$\varphi_{n,i}^{+}(\xi)=\begin{cases}0,\xi\in\psi_n^{-1}\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right),\\ 1,\xi\in[0,1)\setminus\psi_n^{-1}\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right),\end{cases}$$

$\varphi^{-}_{n,i,j}(\xi) = -\varphi^{+}_{n,i}(\xi)\cdot\varphi^{+}_{n+1,j}(\xi)$ при $n = 1,2,\ldots;$ $i = 1,2,\ldots,2^n$ и $j = 1,$ $2,\ldots,2^{n+1}$. Тогда область сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2^n}(\varphi^{+}_{n,i} + \sum_{j=1}^{2^{n+1}}\varphi^{-}_{n,i,j})\right)$$

равна множеству $\{0,1\}$ в пространстве $L_p[0,1]$ [Корнилов П.А. О множестве сумм условно сходящегося функционального ряда // Математический сборник. – 1988. – 1 (9). – с. 114-127].

Теорема 3.2.1. *Пусть* $p \geq 1$ *и отображение* $\varphi : [0,+\infty) \to L_p[0,1]$ *задано по правилу:* $\varphi(t) = \varphi_{k+1}$ *при* $t \in [k, k+1)$, $k = 0,1,\ldots$. *Тогда область сумм интеграла* $\int\limits_0^{\to+\infty}\varphi(t)\,dt$ *равна множеству действительных постоянных функций пространства* $L_p[0,1]$.

Затем исследуется вопрос линейности области сумм интеграла в конечномерном нормированном пространстве. Выделяется подкласс P перестановок π пространства $\big([0,+\infty),\mu\big)$, где μ – мера Лебега, со свойством $\pi[a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{N}[c_n, d_n)$ для любых неотрицательных чисел a, b. Множество элементов $y \in X$, для которых существует перестановка $\pi \in P$ такая, что $y = \int\limits_0^{\to+\infty} x\big(\pi(t)\big)dt$, обозначим через

$$OC_P\left(\int_0^{\to+\infty} x(t)dt\right).$$

Теорема 3.3.3. Пусть X – конечномерное нормированное пространство, $x:[0,+\infty)\to X$, существует $\int_0^{\to+\infty} x(t)dt$. Тогда множество $OC_P\left(\int_0^{\to+\infty} x(t)dt\right)$ является аффинным.

В качестве следствия устанавливается аналог теоремы Римана (следствие 3.3.4): область сумм условно сходящегося несобственного интеграла числовой функции на множестве $[0,+\infty)$ совпадает с множеством всех вещественных чисел.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту Геннадию Васильевичу Сибирякову за постановку задач и полезные обсуждения. Также автор выражает благодарность доценту Елене Геннадьевне Лазаревой за полезные обсуждения и помощь в оформлении диссертации.

Перечень работ автора по теме диссертации.

1. Осипов О.С. Об области сумм условно сходящегося интеграла в пространстве Банаха // Вестник Томского государственного университета. – 2007. – № 297. – С. 150-156.
2. Осипов О.С. Об интегральном аналоге ряда с двухточечной областью сумм // Сибирский математический журнал. – 2009. – т. 50, № 6. – С. 1348-1355.

3. Осипов О.С. Область сумм условно сходящегося интеграла в банаховом пространстве // Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Дополнительный сборник – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2006 г. – С. 6.
4. Осипов О.С. Об интегральном аналоге ряда с двухточечной областью сумм // Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященная трехсотлетию со дня рождения Леонарда Эйлера: Сборник материалов – Томск: Томский государственный университет, 2007 г. – С. 145-146.
5. Осипов О.С. Об области сумм несобственного интеграла, соответствующего ряду Корнилова // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2008 г. – С. 110.
6. Осипов О.С. Об интегральном аналоге ряда с двухточечной областью сумм // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» [Электронный ресурс] / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев, А.И. Андреев. [Электронный ресурс] – М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. [Адрес ресурса в сети интернет: http://www.lomonosov-msu.ru/2008/]