На правах рукописи

Сыркашев Аркадий Николаевич

О ВАРИАЦИОННОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДАХ В ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.01 – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Томск – 2004

Работа выполнена на кафедре математического анализа Томского государственного университета.

Научный руководитель:

член корреспондент РАО, доктор физико-математических наук, профессор Александров Игорь Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Терпугов Александр Федорович

кандидат физико-математических наук
Садритдинова Гулнора Долимджановна

Ведущая организация:

Саратовский государственный университет

Защита диссертации состоится 27 февраля 2004 г в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.267.05 при Томском государственном университете по адресу:

634050, г.Томск, пр. Ленина, 36,
главный корпус ТГУ, конференцзал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ТГУ.

Автореферат разослан 26 января 2004 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент А.Н. Малютина

Актуальность темы. Краткий исторический обзор

В теории однолистных функций значительное внимание уделяется исследованию геометрических свойств класса S голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Многие вопросы могут быть сформулированы здесь либо в виде задачи исследования на экстремум некоторого вещественнозначного функционала, либо в виде задачи нахождения множества значений некоторого комплекснозначного функционала, определенного в этом классе. Класс S не является линейным, и для решения в нем экстремальных задач методы классического вариационного исчисления оказываются недостаточными, поэтому математиками в теории однолистных функций были предложены другие методы. Одни из наиболее эффективных были даны К. Левнером и М. Шиффером.

В 1923 году К. Левнер [14] представил параметрический метод, получив с помощью теоремы Каратеодори о сходимости семейства областей к ядру дифференциальное уравнение для семейства функций, сходящегося к данной однолистной функции. Посредством этого уравнения он доказал справедливость гипотезы Бибербаха для третьего коэффициента. Систематически развил метод Левнера Г.М. Голузин, доказав, в частности, с его помощью теорему вращения. Параметрическим методом удалось получить ряд точных оценок, а в некоторых случаях, проинтегрировав уравнение Левнера, найти экстремальные функции. В 1943 году П.П. Куфарев [9] дал обобщение уравнения Левнера, названное уравнением Левнера-Куфарева, с помощью которого были решены многие трудные задачи теории однолистных функций. Метод продолжения по параметру использовали в своих работах Г.М. Голузин, И.Е. Базилевич, П.П. Куфарев, И.А. Александров, М.Р. Куваев, В.И. Попов, В.Я. Гутлянский и другие. А в 1984 году Л. де Бранж [5] с помощью уравнения Левнера решил проблему коэффициентов в классе S.

В 1943 году М. Шиффер [17] предложил метод внутренних вариаций. Г.М. Голузин [6] развил его, получив вариационные формулы при меньших предположениях об отображениях. Этот метод приводит при решении экстремальных задач к некоторому дифференциально-функциональному уравнению для каждой экстремальной функции. С помощью полученного уравнения были найдены точные оценки многих функционалов, а для некоторых были указаны и экстремальные функции. Впрочем, часто интегрирование упомянутого уравнения выполнить не удается, так как оно содержит параметры, зависящие от искомого решения. Тогда довольствуются качественной характеристикой экстремальной функции, а именно, описанием образа канонической области (как правило, единичного круга, либо внешности единичной окружности) при отображении экстремальной функцией. В большом круге задач этим образом оказывается вся плоскость, разрезанная по кусочно-аналитической кривой. В таких случаях экстремальная функция является предельной для решений некоторого уравнения Левнера. Таким образом, возможным становится комбинировать метод внутренних вариаций и параметрический метод. Один из вариантов объединения методов был предложен П.П. Куфаревым [11–13]. Вариационно-параметрическим методом Куфарева томской школой математиков были решены многие задачи теории однолистных функций.

Большое внимание указанным методам уделено, например, в работах Г.М. Голузина [7], В.К. Хеймана [16], И.А. Александрова [2, 3], К. Поммеренке [15], В.Я. Гутлянского [8].

Цель работы

Изучение взаимосвязей метода внутренних вариаций и метода параметрических представлений теории однолистных функций; построение вариационных формул в различных классах однолистных функций; нахождение новых случаев интегрирования уравнения Левнера-Куфарева; исследование функционала, зависящего от значений функции и первых ее двух производных в фиксированной точке, и применение полученных результатов к исследованию задачи о кривизне линий уровня.

Методы исследования

В работе используются общие методы математического анализа, методы теории функций комплексного переменного, методы геометрической теории конформных отображений, методы теории дифференциальных уравнений, вариационный и параметрический методы и их комбинации.

Научная новизна и практическая значимость

Постановка темы диссертационной работы принадлежит И.А. Александрову. Оригинальные результаты получены под его руководством и при консультациях С.А. Копанева.

Основные результаты являются новыми.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут использоваться при чтении спецкурсов на механико-математических факультетах для студентов, специализирующихся по теории функций комплексного переменного. Результаты и методы исследования данной работы могут быть полезны при решении экстремальных задач геометрической теории функций.

Основные результаты работы

Следующие результаты автор считает основными и выносит на защиту.

Получена новая вариационная формула в классе S как следствие теоремы Голузина с вариацией кольцеобразной области, имеющей полюсы второго порядка.

Путем интегрирования уравнения Левнера-Куфарева получено интегральное представление подкласса класса S^*.

Путем интегрирования уравнения Левнера-Куфарева получена интегральная формула в некотором подклассе класса S, аналогичная формуле Базилевича.

Приведена качественная характеристика граничных функций функционала, зависящего от значения функции класса S и первых двух ее производных в фиксированной точке единичного круга.

Указано множество функций, содержащее экстремальные функции в задаче об оценке кривизны линий уровня в классе S, рассматриваемой как функционал, зависящий от значений первых двух производных отображения в двух точках единичного круга.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинарах по теории функций комплексного переменного в Томском государственном университете, на Международной конференции по математике и механике (г. Томск, 2003 г.), на молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2003» (г. Казань, 2003 г.)

Основное содержание диссертации изложено в работах [1–4] из списка работ автора.

Структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, каждая из которых разбита на четыре параграфа, списка литературы, содержащего 54 наименования, списка работ автора. В работе имеется два рисунка. Общий объем диссертации – 97 страниц.

Содержание работы

Отметим, что нумерация всех приведенных ниже утверждений и формул соответствует нумерации, принятой в тексте диссертации.

Первая глава посвящена методу внутренних вариаций в геометрической теории функций комплексного переменного. Рассматривается вариант этого метода, предложенный Г.М. Голузиным. Представлены вариационные формулы в различных классах однолистных функций.

В §1.1 сформулирована и доказана теорема Голузина, которая и составляет содержание этого метода. Она указывает способ построения вариационных формул в классе всех голоморфных однолистных в единичном круге функций и используется в дальнейшем.

Пусть $w = f(z) \in S$ отображает круг E на область $D \subset J$, и пусть $D(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, – семейство областей, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ к D как к ядру относительно точки $w = 0$. Функции $w = f_\varepsilon(z)$, $f_\varepsilon(0) = 0$, $f_\varepsilon'(0) > 0$, однолистно и конформно отображающие E на $D(\varepsilon)$, согласно теореме Каратеодори о ядре равномерно внутри E сходятся к $f(z)$ при $\varepsilon \to 0$. Предположим, что функция $w = g(z, \varepsilon)$, голоморфная и однолистная по z в кольце $K(r, 1) = \{z\colon\ r < |z| < 1\}$ при каждом фиксированном ε, во-первых, отображает это кольцо на двусвязную область $\Delta(\varepsilon)$, которая при объединении с ограниченной компонентой дополнения совпадает с $D(\varepsilon)$, и, во-вторых, имеет разложение по степеням ε вида

$$g(z, \varepsilon) = f(z) + \varepsilon \cdot zf'(z) \cdot q(z) + \gamma(z, \varepsilon),$$

где $\gamma(z, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно внутри $K(r, 1)$, и $q(z)$ – голоморфная в $K(r, 1)$ функция, имеющая разложение в ряд Лорана $q(z) = T(z) + S(z)$, где $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Теорема 1.1 *В классе S имеет место вариационная формула*

$$\begin{aligned} f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon zf'(z)\Bigg[q(z) - T(z) + \overline{T\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} + \\ + \frac{\overline{c}_0 - c_0}{2} - \frac{f(z)}{zf'(z)} \frac{c_0 + \overline{c}_0}{2} \Bigg] + o(z,\varepsilon). \end{aligned} \qquad (1.1)$$

В §1.2 теорема Голузина применяется для получения вариационных формул в классе S. Сначала приведен вывод основной в рассматриваемом методе вариационной формулы Шиффера-Голузина, с помощью которой при решении экстремальных задач получают дифференциально-функциональное уравнение для экстремальных функций. Затем предложена одна новая вариационная формула.

Теорема 1.3 *В классе S имеет место вариационная формула*

$$\begin{aligned} f(z,\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f(z) \sum_{k=1}^{m} \Bigg\{ A_k H^3(z_k) \frac{3f(z_k) f(z) - 2f^2(z)}{\left(f(z) - f(z_k)\right)^2} - \\ - A_k\left[M(z, z_k) - \left(1 + N(z_k)\right) L(z, z_k) \right] + \\ + \overline{A}_k \left[M\left(z, \frac{1}{\overline{z}_k}\right) + \left(1 + \overline{N(z_k)}\right) L\left(z, \frac{1}{\overline{z}_k}\right) \right] \Bigg\} + o(z,\varepsilon), \end{aligned} \qquad (1.4)$$

где z_k, $k = 1, 2,\ldots, m$, $m \in \Gamma$, – различные точки из E, A_k – произвольные комплексные постоянные, и

$$H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \quad L(z,a) = H(z)\frac{z+a}{z-a} + 1,$$

$$N(z) = \frac{zf''(z)}{f'(z)}, \quad M(z,a) = H(z)\frac{az}{(z-a)^2}.$$

С помощью этой формулы далее получено дифференциальное уравнение второго порядка для экстремальных функций в задаче о кривизне линий уровня функций класса S.

В §1.3 представлены два примера применения теоремы Голузина для построения вариационных формул в других классах однолистных функций. В теореме 1.4 предложен новый вывод известной вариации в подклассе звездообразных функций класса S, впервые полученной И.А. Александровым [1]. В теореме 1.5 дана вариационная формула в классе Σ_0.

В §1.4 приведены вариационные формулы, имеющие при решении экстремальных задач вспомогательное значение. Все они получены элементарным образом без привлечения теоремы Голузина.

Вторая глава посвящена методу параметрических продолжений и его взаимосвязям с вариационным методом.

В §2.1 этой главы представлено уравнение Левнера-Куфарева

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\, p(\zeta,\tau), \quad 0 \le \tau < \tau^0, \quad 0 < \tau^0 \le \infty, \qquad (2.1)$$

где $p(\zeta, \tau)$ заданная в $E\times T$, $T = [0, \tau^0)$, функция, при каждом фиксированном τ принадлежащая классу C голоморфных в E функций $p(z)$, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$, и непрерывная по совокупности переменных в цилиндре $E\times T$. Множество всех таких функций $p(\zeta, \tau)$ обозначено через $\mathrm{P}(C,T)$.

Сформулирована теорема о существовании и свойствах его решения, и представлено доказательство [2]. Свойства решений этого уравнения впервые были изучены в работе П.П. Куфарева [10].

Затронут вопрос о зависимости решения уравнения (2.1) от вещественного параметра, и результат сформулирован в виде теоремы 2.2 и следствия 2.2.

Теорема 2.2 *Пусть функция* $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ *при каждом фиксированном* ε, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, *принадлежит классу* $\mathrm{P}(C,T)$, *является непрерывно дифференцируемой по* ε *в* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *и ее производная* $p'_\varepsilon(\zeta,\tau,\varepsilon)$ *ограничена внутри* $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. *Тогда решение* $\zeta(\tau, z, \varepsilon)$ *уравнения*

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\, p(\zeta,\tau,\varepsilon), \qquad \zeta\big|_{\tau=0} = z \in E,$$

непрерывно по совокупности переменных внутри $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *и существует непрерывная по совокупности переменных внутри* $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *производная* $\zeta'_\varepsilon(\tau,z,\varepsilon)$.

В §2.2 представлены некоторые случаи интегрирования уравнения Левнера-Куфарева частного вида.

В первом пункте этого параграфа приведено известное интегральное представление функций класса S^* посредством функций $p(z)$ класса C, полученное как результат интегрирования уравнения (2.1) с правой частью, не зависящей от переменного τ (автономное уравнение Левнера-Куфарева).

Указан способ построения вариационных формул в классе S^*, используя вариационные формулы в классе C, приведено два примера таких построений.

Во втором пункте путем интегрирования уравнения Левнера-Куфарева с функцией $p(\zeta, \tau) = 1/p(e^{-\alpha\tau}\zeta)$, где $p(z) \in$ C, получена новая интегральная формула в некотором подклассе класса S^*.

Теорема 2.4 *Пусть* $p(z) \in$ C, *и* α, $\alpha \ge 0$, – *произвольное постоянное. Классу* S^* *принадлежит функция*

$$f(z) = z\exp\left\{\int_0^z \frac{p(t)-1}{\alpha p(t)+1}\frac{dt}{t}\right\}.$$

Заметим, что из этой формулы при $\alpha = 0$ получается упомянутое выше интегральное представление класса S^*.

В третьем пункте представлен вывод формулы Базилевича [4] как классический случай интегрирования уравнения Левнера-Куфарева.

И, наконец, предложена новая интегральная формула, аналогичная формуле Базилевича. Она получена путем интегрирования уравнения Левнера-Куфарева с функцией $p(\zeta, \tau) = 1/[p_0(\zeta) + e^{(1-\alpha)\tau}p_1(\zeta)]$.

Теорема 2.6 *Пусть* $p_0(z)$, $p_1(z)$ *– голоморфные в* E *функции с положительными вещественными частями, и* α, $0 \le \alpha < 1$,*– произвольное постоянное. Классу* S *принадлежит функция*

$$f(z) = \left[\frac{p_0(0)}{p_0(0)+p_1(0)}\left(z^{(1-\alpha)p_0(0)}\exp\left\{(1-\alpha)\int_0^z \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du\right\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-\alpha)\int_0^z p_1(v)v^{(1-\alpha)p_0(0)-1}\exp\left\{(1-\alpha)\int_0^v \frac{p_0(u)-p_0(0)}{u}du\right\}dv\right)\right]^{\mu},$$

где $\mu = 1\big/\left[(1-\alpha)p_0(0)\right]$.

Заметим, что из этой интегральной формулы можно получить формулу Базилевича, положив $\alpha = 0$ и $p_2(z) = p_0(z) + p_1(z)$.

В §2.3 с помощью уравнения Левнера-Куфарева получены вариационные формулы в некотором подклассе класса S.

Пусть для функции $f(z) \in S$ найдется такая функция $p(\zeta, \tau) \in \mathrm{P}(C,T)$, что $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(\tau, z)$, где $\zeta(\tau, z)$ – решение уравнения Левнера-Куфарева. Множество всех таких функций $f(z)$ обозначим через S(C, T). Оно является плотным подклассом класса S.

Теорема 2.8 *Пусть функция* $p(\zeta, \tau, \varepsilon)$ *при каждом фиксированном* ε, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *принадлежит классу* $\mathrm{P}(C,T)$, *непрерывно дифференцируема по* ε *в* $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, *имеет в окрестности* $\varepsilon = 0$ *разложение вида*

$$p(\zeta, \tau, \varepsilon) = p(\zeta, \tau) + \varepsilon T(\zeta, \tau) + \gamma(\zeta, \tau, \varepsilon),$$

где $\gamma(\zeta, \tau, \varepsilon)/\varepsilon \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно внутри* $E\times T$, *и пусть производная* $p'_{\varepsilon}(\zeta,\tau,\varepsilon)$ *ограничена внутри* $E\times T\times(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. *Тогда в классе* S(C, T) *имеет место вариационная формула*

$$f(z,\varepsilon) = f(z) - \varepsilon f'(z)\int_0^{\infty}\frac{\zeta(\tau,z)}{\zeta'_z(\tau,z)}T\left(\zeta(\tau,z),\tau\right)d\tau + o(z,\varepsilon),$$

где $\zeta(\tau, z)$ *– решение уравнения* (2.1).

В §2.4 представлены различные варианты объединения вариационного и параметрического методов, предложенные Н.А. Лебедевым (теорема 2.10) и П.П. Куфаревым (теорема 2.11). Они основаны на том обстоятельстве, что во многих задачах экстремальные функции отображают круг E на области, полученные из плоскости проведением разреза по кусочно-аналитической кривой. В теореме 2.12 в новой редакции в терминах и обозначениях метода параметрических представлений дана одна вариационная формула М. Шиффера [18].

Пусть $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots \in S$ отображает круг E на область $B_0 = $ J $\setminus L$, где L – кусочно-гладкая кривая с параметрическим уравнением $w = \varphi(t)$, $0 \le t \le \infty$. Функция $\varphi(t)$ такова, что область B_τ, полученная из плоскости проведением разреза $w = \varphi(t)$, $\tau \le t \le \infty$, односвязна. Параметризацию семейства областей B_τ будем считать стандартной, то есть производящую для $f(z)$ функцию $w = \Psi(z, \tau)$, $\Psi(z, 0) = f(z)$, однолистно и конформно отображающую E на B_τ, нормированной разложением $\Psi(z, \tau) = e^{\tau}(z + c_2(\tau) z^2 + \ldots)$.

Теорема 2.12 *Классу* S *принадлежит функция*
$$\begin{aligned} f^*(z) &= f(z) + e^{-\tau}\left[2e^{i\theta} - c_2(\tau)\right]f^2(z) + \\ &+ e^{-2\tau}\left[3e^{2i\theta} - 4e^{i\theta}c_2(\tau) + 2c_2^2(\tau) - c_3(\tau)\right]f^3(z) + o\left(e^{-2\tau}\right), \end{aligned}$$

где $0 \le \theta < 2\pi$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\left[e^{2\tau}o\left(e^{-2\tau}\right)\right] = 0$, *и* $c_k(\tau)$ *– коэффициенты производящей для* $f(z)$ *функции* $\Psi(z, \tau)$.

В третьей главе исследуется экстремальная задача. В §3.1 дана постановка задачи. Требуется найти область значений функционала, зависящего от значений функции и первых двух ее производных:

$$I:S \to \mathrm{J}\ ,\ I(f)=J\left(f(z_0),\overline{f(z_0)},f'(z_0),\overline{f'(z_0)},f''(z_0),\overline{f''(z_0)}\right) \qquad (3.1)$$

где $J\colon \Theta \to \mathrm{J}$, $J = J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6)$ – есть функция, отличная от постоянной и аналитическая в некоторой области Θ, $\Theta \subset \mathrm{J}^{\,6}$, и $z_0 \in E$, $z_0 \neq 0$, – произвольно фиксированная точка.

Для исследования этой задачи используется метод внутренних вариаций. Установлено, что образ единичного круга при отображении $w = f(z)$ не имеет внешних точек.

В §3.2 получено дифференциально-функциональное уравнение для граничной функции.

Теорема 3.1. *Каждая граничная функция функционала* (3.1) *удовлетворяет в E дифференциально-функциональному уравнению*

$$\frac{A\left(f(z)\right)}{\left(f(z)-f(z_0)\right)^3}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{B(z)}{(z-z_0)^3\left(1-\overline{z}_0 z\right)^3}, \qquad (3.5)$$

где $A(w) = a_0w^2 + a_1w + a_2$, $B(z)=b_0z^6+b_1z^5+b_2z^4+b_3z^3+\overline{b}_2z^2+\overline{b}_1z+\overline{b}_0$.

Коэффициенты полиномов $A(w)$ и $B(z)$ указаны в явном виде.

В §3.3 проведен качественный анализ полученного уравнения. Установлено, что граничная функция отображает единичный круг E на область одного из двенадцати типов. При этом граница области $f(E)$ является кусочно-аналитической кривой, содержащей бесконечно удаленную точку и имеющей не более трех конечных концевых точек.

В §3.4 рассмотрен конкретный функционал: кривизна линий уровня функций $g(z)$ класса S в точке $w_0 = g(z_0)$ при фиксированном $z_0 \in E$

$$K_r=\frac{1}{\left|z_0g'(z_0)\right|}\mathrm{Re}\left[1+\frac{z_0g''(z_0)}{g'(z_0)}\right]. \qquad (3.9)$$

Задача нахождения экстремумов функционала (3.9) эквивалентна задаче об экстремумах функционала

$$K_r=\frac{1-r^2}{r}\left|f'(r)\right|\mathrm{Re}\left(1+r^2-2rc_2\right), \qquad (3.11)$$

который и исследуется в дальнейшем. Для этого применен вариационный метод. Установлено, что экстремальные функции функционала (3.11) отображают единичный круг на области без внешних точек. Получено дифференциально-функциональное уравнение для экстремальной функции.

Теорема 3.4 *Если* $w = f(z)$ *– экстремальная функция функционала* (3.11), *то она удовлетворяет в E дифференциально-функциональному уравнению*

$$\frac{A\left(f(z)\right)}{f(z)\left(f(z)-f(r)\right)^2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2=\frac{B(z)}{z(z-r)^2\left(z-r^{-1}\right)^2}, \qquad (3.13)$$

где $A(w) = a_0w^2 + a_1w + a_2$, *и* $B(z)=z^6+b_1z^5+b_2z^4+b_3z^3+\overline{b}_2z^2+\overline{b}_1z+1$.

Полученное уравнение (3.13) является уравнением такого же типа, что и уравнение (3.5), поэтому качественная характеристика их решений совпадает. Для экстремальных функций в задаче о кривизне линий уровня эту характеристику удается уточнить.

Теорема 3.5 *Если* $w = f(z)$ *– экстремальная функция функционала* (3.11), *то она осуществляет отображение круга E на* $\mathrm{J}\setminus\Gamma$, *где* Γ *– кусочно-аналитическая, содержащая бесконечно удаленную точку кривая одного из следующих видов*:

1. *кривая* Γ *состоит из одной аналитической дуги, при этом*

a) $A(w) = a_0(w - w_1)(w - w_2),\ B(z) = (z-\mu)^2 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right)(z - z_2)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_2}\right),$ *где* $w_k = f(z_k),\ z_k \in E,$ $k = 1, 2;$

b) $A(w) = a_0(w - w_1)(w - w_2),\quad B(z) = (z-\mu)^4 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right),$ *где* $w_1 = f(z_1),\ z_1 \in E,\ w_2 = f(\mu);$

c) $A(w) = a_1(w - w_1),\quad B(z) = b_0 (z-\mu)^2 (z-\nu)^2 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right),$ *где* $w_1 = f(z_1),\ z_1 \in E, f(\nu) = \infty;$

2. *кривая* Γ *состоит из двух аналитических дуг, имеющих общим концом точку* w_2 *и образующих в ней углы* $2\pi/3$ *и* $4\pi/3$, *при этом*

$A(w) = a_0(w - w_1)(w - w_2),$

$B(z) = (z-\mu)^2 (z-\eta)^2 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right),$ *где* $w_1 = f(z_1),\ z_1 \in E,\ w_2 = f(\eta),\ |\eta| = 1;$

3. *кривая* Γ *состоит из двух аналитических дуг, имеющих общим концом бесконечно удаленную точку, при этом*

$A(w) = a_1(w - w_1),$

$B(z) = (z-\mu_1)^2 (z-\mu_2)^2 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right),$ *где* $w_1 = f(z_1),\ z_1 \in E;$

4. *кривая* Γ *состоит из трех аналитических дуг, имеющих общим концом точку* w_2 *и образующих в ней равные углы, при этом*

$A(w) = a_0(w - w_1)(w - w_2),$

$B(z) = (z-\mu_1)^2 (z-\mu_2)^2 (z - z_1)\left(z - \dfrac{1}{\overline{z}_1}\right),$ *где* $w_1 = f(z_1),\ z_1 \in E.$

Экстремальная функция функционала (3.11) удовлетворяет также некоторому дифференциальному уравнению второго порядка.

Теорема 3.6 *Если* $w = f(z)$ *– экстремальная функция функционала* (3.11), *то она удовлетворяет дифференциально-функциональному уравнению*

$$\left(\frac{zw'}{w}\right)^3 \frac{P(w)}{w(w - f(r))^3} - \left(1 + \frac{zw''}{w'}\right)\frac{2B(z)}{z(z-r)^2 (z-r^{-1})^2} = \frac{-R(z)}{z(z-r)^3 (z-r^{-1})^3},$$

где $P(w) = p_0 w^3 + p_1 w^2 + p_2 w + p_3$,

и $R(z) = z^8 + d_1 z^7 + d_2 z^6 + d_3 z^5 + d_4 z^4 - \overline{d}_3 z^3 - \overline{d}_2 z^2 - \overline{d}_1 z - 1$.

Коэффициенты полиномов $P(w)$ и $R(w)$ указаны в явном виде.

Литература

1. Александров И.А. Вариация звездообразных функций // Вопросы математики. Тр. Томск. ун-та. 1961. Т. 155. С. 61–71.
2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: ТГУ, 2001. 220 с.
4. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Матем. сб. 1964. Т. 100. С. 628–630.
5. Branges L. A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Math. 1985. V. 154. 1–2. P. 137–152.
6. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении // Матем. сб. 1946. Т. 19. №2. С. 203–236.
7. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
8. Гутлянский В.Я. Параметрическое представление однолистных функций // ДАН СССР. 1970. Т. 194. С. 750–753.
9. Куфарев П.П. Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. 1943. Т. 13. С. 87–118.
10. Куфарев П.П. Теорема о решениях одного дифференциального уравнения // Ученые зап. Томского ун–та. 1947. №5. С. 20–21.
11. Куфарев П.П. Одно замечание об экстремальных задачах теории однолистных функций // Учен. зап. Томск. ун-та. 1951. №14. С. 3–7.
12. Куфарев П.П. Об одном свойстве экстремальных областей задачи коэффициентов // ДАН. 1954. Т. 97. С. 391–393.
13. Куфарев П.П. Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций // ДАН. 1956. Т. 107, №5. С 633–635.
14. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. 89. P. 103–121.
15. Pommerenke Ch. Univalent functions. Göttingen, 1975.
16. Хейман В.К. Многолистные функции. М.: ИЛ, 1960. 182 с.
17. Schiffer M. Variation of the Green function and theory of the *p*-valued functions // Amer. J. Math. 1943. V. 65. P. 341–360.
18. Schiffer M. On the coefficient problem for schlicht functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134, №1. P. 95–101.

Работы автора по теме диссертации

1. Копанев С.А., Сыркашев А.Н. Качественный анализ дифференциально-функционального уравнения одного функционала // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск. 2001 г. С. 125–134.
2. Сыркашев А.Н. Вариационная формула в классе звездообразных функций // Международная конференция по математике и механике: тезисы докладов. Томск. 2003. С. 32.
3. Сыркашев А.Н. Об одном случае интегрирования уравнения Левнера-Куфарева // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 21. Лобачевские чтения – 2003. Материалы третьей всероссийской молодежной научной школы-конференции. Казань. 2003. С. 204–206.
4. Сыркашев А.Н. О вариационном и параметрическом методах в теории однолистных функций // Вестник Томск. ун-та. 2003. С. 65–75.